सरल

स्कूल अंकगणित

(नितान्त नवीन शैली पर प्रस्तुत)

हाई स्कूल कक्षाओं के लिए स्वीकृत पाठ्य पुस्तक

आचार्य फकीरचन्द रस्तोगी

भू० पू० प्रिंसिपल, डी० जे० हायर सेकेण्ड्री स्कूल, बड़ौत



कि ता ब म ह ल

इ ला हा बा द

भूमिका

अधिक काल से मैं अंकगणित के ऐसे संक्षिप्त संस्करण की, जो हाई स्कूल के विद्यार्थियों की सभी आवश्यकताओं की पूर्ति कर सके, बड़ी आवश्यकता अनुभव कर रहा था। इसी विचार से मैं विद्यार्थी तथा शिक्षक वर्ग के सम्मुख अपना यह प्रयत्न प्रस्तुत कर रहा हूँ। यह पुस्तक उत्तर प्रदेश की इण्टरमीडिएट तथा हाई स्कूल शिक्षा-समिति द्वारा निर्धारित नवीन पाठ्यक्रम के अनुसार गणित की नवीनतम शैली पर लिखी गई है। प्रारम्भिक अध्याय छात्रों की योग्यता के अनुसार कुछ ऊँची माप पर और उत्तरार्द्ध अध्याय सविस्तार रूप से लिखे गये हैं।

अवश्य ही पुस्तक के सम्बन्ध में मौलिकता का विचार कर लेना अहम्मन्यता समझी जायगी; किन्तु इतना कहने में मुझे भय भी नहीं है कि वस्तु स्थापना का ढंग सचमुच अपना है और प्रस्तुत पुस्तक को मैंने अंकगणित जैसे नीरस विषय को मूढ़तर छात्र तक के लिए सुरुचिपूर्ण और बोध-गम्य बनाने का प्रयत्न किया है।

यह पुस्तक अंकगणित सम्बन्धी समस्त उपलब्ध साहित्य का सार होने के कारण अच्छी शृङ्खला और सन्दर्भ कोष है। मैं आशा करता हूँ कि यदि हमारे छात्र इस ढाँचे का अनुकरण करने के लिए उत्साहित किये गये तो उनकी अंकगणित से अरुचि शीघ्र तिरोहित हो जायगी और यदि ऐसा हुआ कि यह उनके इस दोष को आंशिक रूप में भी दूर करने में समर्थ हुई तो मुझे समुचित संतोष होगा।

यदि कोई बन्धु पुस्तक को उन्नत करने के हेतु कोई सुझाव भेजने की कृपा करेंगे तो मैं उनका आभारी हूँगा।

लेखक

अंकगणित के प्रश्नपत्र के उत्तर देने में परीक्षार्थियों द्वारा की गई तथा विभिन्न परीक्षाओं के निरीक्षकों द्वारा बतलाई गई विशेष त्रुटियाँ

१. भद्दे उत्तर जिनसे कि असावधानी, ध्यान की कमी तथा प्रश्न-पत्र पढ़ने की सतर्कता की कमी मालूम होती है।

२. अप्रत्यक्ष अंक लिखकर क्रिया में उनका अशुद्ध पढ़ा जाना।

३. क्रिया के विभिन्न चरणों में स्पष्टीकरण की कमी जिसके फलस्वरूप अनियमित क्रियाएँ बन पड़ती हैं।

४. धन राशि का भिन्न में प्रकट करना और शेष क्रिया न करके छोड़ देना।

५. गुणनखण्डों को काटना विस्मृत कर देना।

६. मध्य के फलों की, जो अन्त में कट जायँगे, सविस्तार क्रिया करना।

७. सिक्कों के चिह्न न लगाना।

८. समानता के (=) चिह्न तथा अन्य बीजगणित के चिह्नों का त्रुटिपूर्ण प्रयोग करना।

९. भार और माप के मापो से अपरिचय।

१०. लम्बाई और क्षेत्रफल की मापों में भ्रम और परिवर्तन में त्रुटि करना।

११. अंकगणित के प्रश्नपत्र हल करने में बीजगणित के चिन्हों की उपेक्षा जिससे प्रकट होता है कि अंकगणित तथा बीजगणित का कृत्रिम अन्तर अब तक रखा जाता है।

अंकगणित के प्रश्नपत्र के उत्तर देने में परीक्षार्थियों द्वारा की गई तथा विभिन्न परीक्षाओं के निरीक्षकों द्वारा बतलाई गई विशेष त्रुटियाँ

१. भद्दे उत्तर जिनसे कि असावधानी, ध्यान की कमी तथा प्रश्न-पत्र पढ़ने की सतर्कता की कमी मालूम होती है।

२. अप्रत्यक्ष अंक लिखकर क्रिया में उनका अशुद्ध पढ़ा जाना।

३. क्रिया के विभिन्न चरणों में स्पष्टीकरण की कमी जिसके फलस्वरूप अनियमित क्रियाएँ बन पड़ती हैं।

४. धन राशि का भिन्न में प्रकट करना और शेष क्रिया न करके छोड़ देना।

५. गुणनखण्डों को काटना विस्मृत कर देना।

६. मध्य के फलों की, जो अन्त में कट जायँगे, सविस्तार क्रिया करना।

७. सिक्कों के चिह्न न लगाना।

८. समानता के (=) चिह्न तथा अन्य बीजगणित के चिह्नों का त्रुटिपूर्ण प्रयोग करना।

९. भार और माप के मापों से अपरिचय।

१०. लम्बाई और क्षेत्रफल की मापों में भ्रम और परिवर्तन में त्रुटि करना।

११. अंकगणित के प्रश्नपत्र हल करने में बीजगणित के चिन्हों की उपेक्षा जिससे प्रकट होता-है कि अंकगणित तथा बीजगणित का कृत्रिम अन्तर अब तक रखा जाता है।

विषय-सूची



पहला अध्याय

अंकनपद्धति तथा संख्यालेखन

परिभाषाएँ

वह वस्तु जो घटाई या बढ़ाई जा सके अथवा जो कुल के समान भागों से बनी हुई समझी जा सके **राशि** कहलाती है।

राशि भिन्न-भिन्न भागों से बनती है। जैसे बालकों की एक कक्षा, आमों की एक टोकरी, किताबों का एक बंडल, इत्यादि, ये सब राशि हैं। प्रत्येक भाग इकाई कहलाता है और यही इकाई गणित का आधार है।

राशि में दो बातें होती हैं एक **परिमाण** और दूसरी **संख्या**।

किसी राशि के परिमाण से पता चलता है कि वह कितनी है और संख्या से इस बात का ज्ञान होता है कि उसमें कितनी इकाइयाँ हैं।

जब हम किसी राशि के परिमाण का अनुभव गिनकर करते हैं तो उस परिमाण को **संख्या** कहते हैं। जैसे, आठ, तेईस, इत्यादि।

अंकगणित विज्ञान का वह भाग है जिसमें संख्याओं का वर्णन हो और कला का वह अंश है जिसमें गणना के लिए इन संख्याओं के प्रयोग करने का नियम हो।

संख्याएँ दस चिन्हों द्वारा प्रकट की जाती हैं जिन्हें **अंक** कहते हैं। वे ये हैं :—

संख्या	एक	दो	तीन	चार	पाँच	छः	सात	आठ	नौ	शून्य
चिह्न	१	२	३	४	५	६	७	८	९	०

शब्दों में लिखी हुई संख्याओं को अंकों द्वारा प्रकट करने की रीति को **अंकनपद्धति** कहते हैं। जैसे, एक सौ पैंतीस को १३५ से प्रकट करते हैं।

निम्नलिखित को अंकों की सहायता से लिखो :—

(१२) पाँच हजार छः सौ आठ।

(१३) सात लाख चालीस हजार उन्नीस।

(१४) छः करोड़ अस्सी लाख उन्नीस हजार तीन सौ पैंतालीस।

(१५) छः अंकों की छोटी से छोटी और चार अंकों की बड़ी से बड़ी कौन-सी संख्याएँ बन सकती हैं?

खंड ख–नम्बर ४–(१६) ४, ३, ०, ८ की सहायता से छोटी से छोटी और बड़ी से बड़ी कौन-सी संख्यायें बन सकती हैं?

क्रिया:—छोटी से छोटी संख्या = ३०४८
बड़ी से बड़ी संख्या = ८४३० } **उत्तर**

सूचना:—वास्तव में ०३४८ सबसे छोटी संख्या होगी परन्तु शून्य (०) संख्या के आरम्भ में नहीं रखा जाता।

(१७) तीन अंकों की सहायता से बनने वाली बड़ी से बड़ी और छोटी से छोटी संख्याएँ ज्ञात करो।

(१८) सात अंकों की छोटी से छोटी संख्या बताओ। इतने ही अंकों की बड़ी से बड़ी कौन सी संख्या हो सकती है?

(१९) चार अंकों वाली बड़ी से बड़ी और छोटी से छोटी कौन सी संख्याएँ हो सकती हैं जो चार से आरम्भ होती हों, और जिनके अन्त में तीन हो?

(२०) ७३५ को इस प्रकार लिख सकते हैं:—७ × १०० + ३ × १० + ५। इसी प्रकार निम्न संख्याओं को लिखो :— ६४६, १८७३।

(२१) १०० अ + १० ब + स एक संख्या है। उसे ज्ञात करो जब कि

(१) अ = ३, ब = ४, स = ५

(२) अ = ६, ब = ७, स = ८

(३) अ = ३, ब = २, स = १

(४) अ = २, ब = १, स = ०

(५) अ = ६, ब = ०, स = ४

(६) अ = ०, ब = ०, स = ३

(२२) य और र से बनी हुई संख्याओं को बताओ जब कि (१) य दहाई का अंक हो और र इकाई का अंक हो (२) र दहाई का अंक और य इकाई का अंक हो।

दूसरा अध्याय

चार मूल नियम

प्रश्नावली २

खंड क—नम्बर १—(१) २५६७३, १४३६५, और ३६५४१ के योगफल को ८६४३५७ में से घटाओ तथा जोड़ और घटाने की क्रियाएँ एक ही साथ करो।

क्रिया :—

		विस्तार	
८६४३५७			
२५६७३	३ + ५ + १	= ९; ९ + ८ = १७;	हासिल **१**
१४३६५	१ + ७ + ६ + ४	= १८; १८ + ७ = २५;	” **२**
३६५४१	२ + ६ + ३ + ५	= १६; १६ + ७ + २३;	” **२**
७८७७७८	२ + ५ + ४ + ६	= १७; १७ + ७ = २४;	” **२**
	२ + २ + १ + ३	= ८; ८ + ८ = १६;	” **१**
उत्तर	१ + ० + ० + ०	= १; १ + ७ = ८;	” **०**

सूचना :—दक्षिण ओर वाले मोटे अंक उत्तर के अंक हैं।

(२) ५४३२१, ६७४०३, ६०५०४, १२३०५ के योगफल को बिना योग की क्रिया किये ३२३५६९ में से घटाओ।

निम्नलिखित योग के प्रश्नों में पुष्पांकित अंकों को पूरा करो :—

(३)
```
   ७८४३०४
     २६३८
  ❀❀❀❀❀❀❀
   २०११९८
   ५१३४५०
 ─────────
  ३३४५६७८
```

(४)
```
  ५६१४❀
  २४३❀४
  १❀६६४
  ८३०६५
 ────────
 १❀६२४५
```

निम्न वर्गों में से कुछ में अंक लिखे हैं और कुछ में नहीं, परन्तु उनका योगफल चाहे खड़ी लाइन जोड़ें या पड़ी, अथवा एक कोने से जोड़ें या दूसरे से, प्रत्येक दशा में बराबर है, तो उन रिक्त वर्गों में अंकों को लिखो।

(५)

	१	६
३	५	
	६	२

(६)

५	२		८
	७	५	
	१		४
२		७	१

(७) यदि २५६ अ, और २ ब ४ का योगफल २८४७ हो, तो अ और ब कौन से अंकों के लिये रखे गये हैं? (अ इकाई के स्थान में लिखा गया है, और ब दहाई के)।

(८) निम्नलिखित घटाने के प्रश्नों में मिटे हुए अंकों के स्थान पर अ, ब, स, द, य लिखे हुए हैं। उनका मान ज्ञात करो।

(क) ५ अ ६ ब ७
य ३ ४ ६ स
―――――――
६ द ७ ५

(ख) ६ ७ ३ अ अ
द २ ब ब ६
―――――――
८ ४ स ६ २

(९) निम्नलिखित गुणन के प्रश्न में अ, ब, स, द, य को किन-किन अंकों के लिये प्रयोग किया गया है?

१ अ ब स द य
३
―――――――
अ ब स द य १

नम्बर २–(१०) २९५६७ को ४५५३५ से तीन पंक्तियों में गुणा करो।

क्रियाः—

२ ९ ५ ६ ७	
४ ५ ५ ३ ५	विस्तार
१ ४ ७ ८ ३ ५	(१) पहले ५ से गुणा किया।
१ ० ३ ४ ८ ४ ५	(२) ५ के गुणनफल को ७ से गुणा किया। इस प्रकार यह ५ × ७ = ३५ का गुणन फल हुआ।
१ ३ ३ ० ५ १ ५	(३) ५ के गुणनफल को ९ से गुणा किया। इस प्रकार यह ५ × ९ = ४५का गुणन-फल हुआ।
१ ३ ४ ६ ३ ३ ३ ३ ४ ५	
उत्तर	

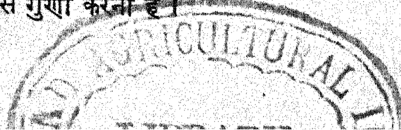
याद रखो :—

१. यह आवश्यक नहीं है कि प्रथम अंक जिससे गुणा किया जाता है वह उस संख्या का पहला ही अंक हो। यह पहला, दूसरा, बीच का या अंत का कोई भी अंक हो सकता है।

२. गुणनफल की संख्या के अंकों को अपने ठीक स्थान पर रखने के लिए बड़ी सावधानी से काम लेना चाहिए जिससे उनका स्थानिक मान ठीक रहे। इसके ठीक होने के निश्चय के लिए आरम्भ में विद्यार्थी को नीचे लिखे नियमों में से किसी एक का पालन करना चाहिए :—

(अ) क्रिया की प्रत्येक पंक्ति में प्रथम अंक को गुणक के उस अंक के नीचे रखना चाहिए जिससे कि गुणा किया गया है। दूसरे अंक स्वयं अपने अपने स्थान पर आ जायेंगे।

(ब) क्रिया की प्रत्येक पंक्ति में इतने शून्य बढ़ा देने चाहिये जितने कि गुणक में उस अंक से पहिले अंक हों जिससे गुणा करना है।



निम्नलिखित गुणन के प्रश्नों को केवल दो पंक्तियों में गुणा करोः—

(११) १०१५×४१६

(१२) २०३१×७६३

निम्नलिखित प्रश्न को तीन पंक्तियों में गुणा करके गुणनफल ज्ञात करो :—

(१३) ५७६३२×७२८५०४

संकेतः—क्रिया में प्रथम पंक्ति का गुणनफल निकालने के लिए ८ से गुणा करो।

(१४) ६१८१६८×४१६३२०

खंड ख—नम्बर ३—(१५) नीचे लिखे गुणन के प्रश्न में अंकों के पुष्पांकित स्थान पूर्ण करो :—

क्रिया :—

			६	५	४	३
				❀	❀	५
		❀	❀	❀	❀	❀
	❀	❀	❀	❀	❀	
❀	❀	❀	❀	❀		
❀	❀	❀	❀	४	७	५

			६	५	४	३
				❀	❀	५
		३	२	७	१	५
	❀	❀	❀	❀	❀	
❀	❀	❀	❀	❀		
❀	❀	❀	❀	४	७	५

विस्तार

(१) ∵ गुणनफल में प्रथम अंक ५ है, और
३×५=१५

∴ गुणक का प्रथम अंक भी ५ होना चाहिये।

(२) गुणनफल का दूसरा अंक ७ है परन्तु ५ के गुणा से जो गुणनफल आता है उसका दूसरा अंक १ है और १+६=७।

```
      ६  ५  ४  ३
         ❀  २  ५
-------------------
   ३  २  ७  १  ५
१  ३  ०  ८  ६
❀  ❀  ❀  ❀  ❀
-------------------
❀ ❀ ❀ ❀ ४ ७ ५
```

∴ हमको एक के नीचे ६ रखना चाहिए जो कि ३ व २ के गुणा करने से मिल सकता है। ∴ गुणक का दूसरा अंक २ है।

(३) गुणनफल में तीसरा अंक ४ है। ७ और ८ का योगफल = १५ है। १५ + ९ = २४। ∴ हमको ८ के नीचे ९ रखना चाहिये जो ३ × ३ के गुणन से मिल सकता है। ∴ गुणक का तीसरा अंक ३ है।

```
         ६  ५  ४  ३
            ३  २  ५
----------------------
      ३  २  ७  १  ५
   १  ३  ०  ८  ६
१  ९  ६  २  ९
----------------------
२  १  २  ६  ४  ७  ५
```

(१६) नीचे लिखे गुणन के प्रश्न में रिक्त स्थानों को भरो :—

```
      ३ ५ ९ ७
        ❀ ❀ ❀
---------------
    ❀ ❀ ७ ९ १
  ❀ ❀ ❀ ❀ ❀
❀ ❀ ❀ ❀ ❀
---------------
❀ ❀ ❀ ❀ ५ ४ १
```

(१७) यदि २०८ को किसी संख्या से गुणा किया जाये तो गुणनफल इससे ६०३२ अधिक आता है, तो गुणक ज्ञात करो।

संकेत:—गुणाक = २०८; गुणनफल = २०८ + ६०३२ = ६२४० अब वह प्रश्न इस प्रकार लिखा जा सकता है :—

```
      २  ०  ८
         ❀  ❀
---------------
   ❀  ❀  ❀
•  ❀  ❀  ❀
---------------
६  २  ४  ०
```

नम्बर ४—(१८) ८५३५७ को १२० से ह्रस्व भाग की रीति से भाग दो, और पूर्ण शेष निकालो।

क्रियाः—१२० = ४ × ५ × ६

```
     ⎧ ४ | ८५३५७
१२० ⎨ ५ | २१३३९ — ४ के समूह तथा १ इकाई अधिक = १
     ⎩ ६ |  ४२६७ — २० के समूह तथा ४ के ४ समूह अधिक = १६
         |    ७११ — १२० के समूह तथा २० का १ समूह अधिक = २०
```

∴ यथार्थ शेष
= २० का १ समूह + ४ के ४ समूह + १ इकाई
= २० × १ समूह + ४ × ४ + १
= २० + १६ + १
= ३७ उत्तर

नियमः - यथार्थ शेष = प्रथम शेष + (द्वितीय शेष × प्रथम भाजक) + (तृतीय शेष × प्रथम भाजक × द्वितीय भाजक) + इत्यादि।

संक्षेप में इस नियम को इस प्रकार लिख सकते हैं:—

प्रत्येक अंश शेष को उसके स्वयं भाजक को छोड़ कर उसके पहिले वाले सब भाजकों से गुणा करो, और उनके गुणनफलों को जोड़ो।

(१९) ६४३२८१ को ५१२ से ह्रस्व भाग की रीति से खंड करके भाग दो, और शेष बताओ।

(२०) एक संख्या को क्रमशः ५, ६, ८ से विभाजित करने से क्रमशः ३, ४, ७ शेष रहते हैं। यदि उस संख्या को क्रमशः ८, ६, ५ से भाग दिया जाये तो क्या शेष रहेगा?

(२१) प्रथम और द्वितीय पंक्तियों में मिटी हुई संख्याओं को लिखकर नीचे लिखे भाग का प्रश्न पूर्ण करो:—

```
५ |
  |________________
  |        — शेष ४
८ |
  |________________
  | १७१८ — शेष २
```

संकेतः—∵ भाज्य = भाजक × भागफल + शेष

∴ दूसरी पंक्ति की संख्या = ८ × १७१८ + २

= १३७४४ + २ = १३७४६

(२२) एक संख्या को इस प्रकार भाग दिया गया है :—

अ | ❀ ❀ ❀ ❀

ब | ❀ ❀ ❀ ❀ — शेष १

❀ ❀ ❀ — शेष ३

यदि यथार्थ शेष १६ है तो अ का मान बताओ ।

(२३) निम्नलिखित भाग के प्रश्नों में पुष्पांकित संख्याओं को लिखो :—

	भाजक	भाज्य	भागफल	शेष
(क)	८००	२५६००	❀	❀
(ख)	२३	❀	३८०७	३
(ग)	❀	७७८८०००	२५६	१८०००

(२४) निम्नलिखित भाग के प्रश्नों में पुष्पांकित अंकों को ज्ञात करो :—

(क) ❀❀❀❀) ३ ६ ६ १ २ ३ (२ ७ १

❀ ❀ ❀ ❀

१ ० ४ १ ❀

❀ ❀ ❀ ❀ ❀

१ ६ २ ❀

❀ ❀ ❀ ❀

४ ६ ३

(ख) ४ ❀) ❀ ❀ ८ ❀ (❀ ७

❀ ८ ❀

❀ ६ ❀

❀ ❀ ६

❀ ०

(२५) एक संख्या को ५४१ से भाग दिया गया और उसके आंशिक भाज्य क्रमशः १२३६, १५७३ और ४६१४ आये तो इसके पूर्ण भागफल और शेष ज्ञात करो।

संकेतः—उक्त प्रश्न हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं :—

```
५ ४ १ ) १ २ ३ ६ ❀ ❀ ( ❀ ❀ ❀
         ❀ ❀ ❀ ❀
        ---------------
           १ ५ ७ ३
           ❀ ❀ ❀ ❀
          ---------------
             ४ ६ १ ४
              ❀ ❀ ❀ ❀
          ---------------
```

खण्ड ग—नम्बर ५—(२६) वह छोटी से छोटी कौन सी संख्या है जिसको २४८६१३२ में जोड़ने से योगफल ४१२५ से पूरा-पूरा बँट जाय ?

क्रियाः—

```
४ १ २ ५ ) २ ४ ८ ६ १ ३ २ ( ६ ० २
          २ ४ ७ ५ ०
          -------------
              १ १ १ ३ २
                ८ २ ५ ०
          -------------
                २ ८ ८ २
```

अब इस कारण कि २८८२ में ४१२५ को पूरा भाग दिया जा सके हमको (४१२५ – २८८२) = १२४३ भाज्य में अर्थात् संख्या २४८६१३२ में और जोड़ देना आवश्यक है।

∴ अभीष्ट छोटी से छोटी संख्या = १२४३   उत्तर

(२७) वह छोटी से छोटी कौन-सी संख्या है जिसको १८५४०९२६ में जोड़ने से योगफल २४०९ से पूरा-पूरा बँट जाय ?

(२८) पाँच अंकों की वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जो २१३ से पूरी विभाजित हो सके।

नम्बर ६—(२६) ३५० पृष्ठ की पुस्तक पर पृष्ठ संख्या डालने के लिए कुल कितने अंकों की आवश्यकता है ?

क्रिया :—

१ से ९ पृष्ठ तक पृष्ठ संख्या डालने के लिए कुल अंक = १ × ९ = ९

१० से ९९ " " = २ (९९ − ९) = १८०

१०० से ३५० " " = ३ (३५० − ९९) = ७५३

∴ १ से ३५० " " = ९४२ उत्तर

निम्न पृष्ठ संख्या की पुस्तकों पर अंक डालने के लिए कुल कितने अंकों की आवश्यकता होगी ?

(३०) ४३०　　　(३१) ७५०　　　(३२) ८५५

मिश्रितः —

(३३) ❀ रु० ❀ आ० ❀ पा० का धन १२६९ रु० १२ आ० १ पा० में ३७ बार सम्मिलित है। तो पुष्पांकित स्थानों में अंकों को ज्ञात करो।

(३४) निम्नलिखित परिवर्तन के प्रश्न में पुष्पांकित अंकों को ज्ञात करोः—

रु०	आ०	पा०
२ ❀ ५	❀	❀
१ ६		
३ २ ८ ६ आ०		
१ २		
३ ९ ४ ३ ९ पा०		

(३५) निम्नलिखित गुणन के प्रश्न में क और ख का मान ज्ञात करोः—

पौं०	शि०	पें०
क	ख	४
		४
१०	ख	४

(३६) १५२२०७ को किस संख्या से गुणा करें कि गुणनफल में ८ अंक हों और उनमें से प्रत्येक अंक १ हो? (उ० प्र०, १९३०)

सूचनाः—८ अंकों वाला गुणनफल जिसका प्रत्येक अंक १ है
= ११११११११

∴ अभीष्ट गुणनफल = ११११११११ ÷ १५२२०७

(३७) ४१ को किस संख्या से गुणा करें जिससे कि गुणनफल में केवल ६ के ही अंक प्राप्त हों?

(३८) एक भाग के प्रश्न में भागफल भाजक से ५ गुना है और शेष से १५ गुना। यदि शेष ६ है तो भाज्य बताओ।

(३९) इटली का राजकीय ऋण ३१ मार्च, १९२१ को ६९०६६४००० पौंड था। उसमें से प्रतिवर्ष ७९६५००० पौंड का भुगतान होता रहा। बताओ ३१ मार्च, १९३१ को कितना ऋण शेष रहा। (उ० प्र०, १९३१)

(४०) एक मनुष्य ११६ पौं० २ शि० ६ पें० आय कर देता है। यदि आय-कर की दर ७½ पें० प्रति पौंड हो तो उस मनुष्य की आय क्या है? (उ० प्र०, १९३३)

(४१) योग के निम्नलिखित प्रश्न में लुप्त अंकों की पूर्ति करो :—

```
  ३ २ ५ ४
    १ ३ ५
      ८ ३
  ❀ ❀ ❀ ❀
  १ ६ ३ ७
  -------
  ७ ० ७ ०
```

(उ० प्र०, १९३४)

(४२) यदि ३६ इञ्च = ६६ सेन्टीमीटर हो तो १३ मील को किलोमीटर, मीटर आदि में प्रगट करो। (उ० प्र०, १६३५)

(४३) भाग के एक प्रश्न में भाज्य ५२६५६५ है और शेष क्रमशः २४६, २२२ तथा ५४२ हैं तो भाजक तथा भजनफल ज्ञात करो। (उ० प्र०, १६३६)

(४४) सूर्य से सबसे कम दूरी वाले तारे की दूरी २५४८०,०००,०००,००० मील है। प्रकाश की गति १,८६,००० मील प्रति सेकिन्ड है। तो बताओ सूर्य का प्रकाश कितने वर्षों में उस तारे तक पहुँचेगा। (उत्तर दशमलव के एक स्थान तक ठीक हो और वर्ष ३६५ दिन का समझिये।) (उ० प्र०, १६४०)

(४५) यदि एक पुस्तक की ३२४ प्रतियों का मूल्य ४६ पौं० ११ शि० ६ पैं० है तथा ३४० प्रतियों का मूल्य ४८ पौं० १७ शि० ६ पैं० है तो संक्षिप्त से संक्षिप्त विधि द्वारा उस पुस्तक की २४ प्रतियों का मूल्य ज्ञात करो।

(उ० प्र०, १६४२)

(४६) यदि एक टन = १०१६ किलोग्राम हो तो एक औंस को ग्राम में परिवर्तित करो। उत्तर दशमलव के द्वितीय स्थान तक ठीक हो (उ० प्र०, १६४३)

तीसरा अध्याय

गुणनखण्ड तथा अभाज्य संख्याएँ

यदि दो या दो से अधिक संख्याओं को परस्पर गुणा किया जाये, तो उनके फल को 'गुणनफल' और जिन संख्याओं को परस्पर गुणा किया जाये उनको गुणन खंड कहते हैं। जैसे, ४ × ३ = १२

उक्त उदाहरण में १२ गुणनफल और ४ व ३ गुणन खंड हैं। यह स्पष्ट है कि १२ = ४ × ३ अर्थात् १२ को ४ व ३ से विभाजित किया जा सकता है,

और इन्हीं का गुणनफल भी १२ है। अतः जो संख्या किसी दूसरी संख्या से पूरी-पूरी बाँटी जा सकती है वह उसका **अपवर्त्य** कहलाती है।

जो संख्याएँ २ से पूरी बँट जाती हैं वे **सम** संख्याएँ और जो २ से पूरी नहीं बँटतीं वह **विषम** संख्याएँ कहलाती हैं।

२, ६, ८, १२, २०, २६ सम संख्याएँ हैं और १, ३, ५, ७, ९, ११, १३, १५ विषम संख्याएँ हैं।

संख्याओं का ऐसा क्रम जिसमें दूसरी पहिली से १ अधिक होती जाती है **क्रमिक** संख्यायें कहलाती हैं। जैसे ४, ५, ६, ७, ८ इत्यादि।

निम्नलिखित को ध्यानपूर्वक पढ़ो—

३	=	३×१		
६	=	३×२	=	६×१
८	=	२×२×२	=	८×१
१०	=	५×२	=	१०×१
१३	=	१३×१		
१७	=	१७×१		

इत्यादि।

इनको ध्यानपूर्वक पढ़ने से ज्ञात होता है कि प्रत्येक संख्या के कम से कम दो खंड हो सकते हैं, एक तो वह स्वयं और दूसरा एक, तथा इनके अतिरिक्त कुछ ऐसी भी संख्याएँ हैं जिनके और भी खंड हो सकते हैं।

कुछ संख्याएँ जैसे ३, १३, १७, जिनके केवल वह स्वयं और १ के अतिरिक्त और कोई भी खंड नहीं हो सकते हैं, 'अभाज्य संख्याएँ' कहलाती हैं तथा और दूसरी संख्याएँ जैसे ६, ८, १० जिनके १ के अतिरिक्त और भी खंड हो सकते हैं, 'संयुक्त संख्याएँ' कहलाती हैं।

जब दो या दो से अधिक संख्याओं का सामान्य गुणनखंड केवल १ होता है तो वे परस्पर अभाज्य कही जाती हैं।

जैसे, १, १३, १७, १६, २३, २६, ३१ ये परस्पर अभाज्य संख्याएँ हैं परन्तु यह आवश्यक नहीं कि वे स्वयं अभाज्य ही हों।

सूचना:—केवल २ के अतिरिक्त कोई और सम संख्या अभाज्य नहीं हो सकती।

अभाज्य खण्डों में परिवर्तन

कोई संख्या अभाज्य खण्डों में परिवर्तित हुई तब कही जा सकती है जब कि वह अभाज्य संख्याओं या उनके वर्गों के गुणनफल के रूप में प्रकट हुई हो।

जैसे, ६०० = ६ × १० × १० = २ × ३ × ५ × २ × ५ × २ = ३ × ५² × २³

एक संयुक्त संख्या प्रायः भिन्न प्रकार से खंडों में परिवर्तित की जा सकती है, परन्तु अभाज्य खण्डों में परिवर्तित करने की केवल एक ही रीति है।

जैसे, २८० = १४ × २० या ३५ × ८ या ७० × ४ इत्यादि। परन्तु २ × २ × २ × ५ × ७ या २³ × ५ × ७ ही केवल एक मात्र २८० को अभाज्य खण्डों में परिवर्तित करने की रीति है।

एक से लेकर किसी दी हुई संख्या तक अभाज्य संख्याओं को ज्ञात करना

नियम :—१ से लेकर दी हुई संख्या तक सब संख्याओं को क्रमशः लिखो।

२ से आरम्भ करके जो कि सबसे छोटी अभाज्य संख्या है प्रत्येक दूसरी संख्या ४, ६, ८, १०.........को काटते जाओ, तथा इस प्रकार २ के अपवर्त्यों को छोड़ते जाओ।

दूसरी अभाज्य संख्या ३ है। इसलिए प्रत्येक तीसरी संख्या ६, ९, १२, १५, १८.........को काटते जाओ, तथा इस प्रकार ३ के अपवर्त्यों को भी छोड़ते जाओ, इनमें से कुछ २ के अपवर्त्य होने से पहिले ही छूट जायेंगी।

इसके पश्चात् अभाज्य संख्या ५ आती है इसलिए प्रत्येक पाँचवीं संख्या

को (जो अभी तक नहीं कटी है) काटते जाओ और ५ के अपवर्त्य को भी छोड़ते जाओ।

इस प्रकार करते-करते अन्त में हम २, ३, ५, ७, ११, १३, १७ आदि सब अभाज्य संख्याओं के अपवर्त्यों को काट सकेंगे।

इस प्रकार जब यह क्रिया पूर्ण हो जाती है तो केवल अभाज्य संख्याएँ ही रह जाती हैं।

सूचना :—अन्त की अभाज्य संख्या, जिसके अपवर्त्य को ध्यानपूर्वक देखना है ऐसी होनी चाहिये, जिसका वर्ग दी हुई संख्या से अधिक न हो जाए।

यदि किसी संख्या के अभाज्य अपवर्तक ज्ञात करने हों तो पहले यह देखना होगा कि यह संख्या अभाज्य है या संयुक्त। यदि संयुक्त है तो वह कौन-सी अभाज्य संख्याओं से विभाजित होती है। जैसे, २७३० के अभाज्य अपवर्तक निकालना हो तो उससे क्रमशः २, ३, ५, ७ आदि संख्याओं से भाग देना होगा। भाग देने से ज्ञात होगा कि २७३० = २ × ३ × ५ × ७ × १३।

चूँकि किसी संख्या के अभाज्य अपवर्तक निकालने की यह रीति बहुत लम्बी है इसलिए नीचे कुछ सरल नियम दिये गये हैं जिनके द्वारा किसी भी संख्या के देखते ही अभाज्य अपवर्तक ज्ञात होंगे।

संख्याओं के पूरे-पूरे विभाजित होने की पहचान

(१) जिस संख्या की इकाई का अंक शून्य (०) होता है या २ से पूरा बँट जाता है वह २ से पूरी-पूरी बँट जाती है। जैसे २४, ५०

उपपत्ति :—२४ = २० + ४ = २ दहाई + ४ इकाई

प्रत्येक दहाई २ से पूरी बँट जाती है इसलिए २ दहाइयाँ २ से पूरी बँट जायेंगी। ४ इकाई २ से पूरी बट ही जाती है। इसलिए २४, २ से पूरा-पूरा बँट जाता है।

इसी प्रकार ५० भी २ से पूरा-पूरा बँट जाता है।

(२) जिस संख्या की इकाई व दहाई के अंक शून्य (०) हों या उन अंकों से बनी हुई संख्या ४ (या २५) से पूरी-पूरी बँट जाय वह संख्या ४ (या २५) से पूरी-पूरी बँट जाती है। जैसे ५००, ७३२

उपपत्ति :—५०० = ५ सैकड़े और चूँकि प्रत्येक सैकड़ा ४ से पूरा-पूरा बँट जाता है (१०० ÷ ४) = २५ इसलिए ५ सैकड़े भी ४ से पूरे-पूरे बँट जायँगे।

७३२ = ७०० + ३२
= ७ सैकड़े + ३२

चूँकि ७ सैकड़े और ३२ में से प्रत्येक ४ से पूरा-पूरा बँट जाता है इसलिए ७३२ भी ४ से पूरा-पूरा बँट जायगा।

(३) जिस संख्या की इकाई, दहाई और सैकड़े के अंक शून्य (०) हों या उन अंकों से बनी हुई संख्या ८ (या १२५) से पूरी-पूरी बँट जाय तो वह संख्या ८ (या १२५) से पूरी-पूरी बँट जाती है।
जैसे, ३००० और ४२३२

उपपत्ति :—३००० में पूरे तीन हजार हैं और चूँकि प्रत्येक हजार ८ से पूरा बँट जाता है (१००० = ८ × १२५) इसलिए ३ हजार ८ से पूरा बँट जायगा।

४२३२ = ४००० + २३२ = ४ हजार + २३२

अब ४ हजार और २३२ में से प्रत्येक ८ से बँट जाता है क्योंकि प्रत्येक हजार ८ से पूरा बँट जाता है और २३२ भी (२३२ ÷ ८ = २९)। इसलिए इनका योगफल ४२३२ भी ८ से पूरा बँट जायगा।

(४) जिस संख्या के अंकों का योगफल ३ या ९ से पूरा बँट जाता है वह संख्या ३ या ९ से पूरी बँट जाती है।

(अ) १८, २४, ३६, ५१, १०२ इत्यादि में से प्रत्येक संख्या के अंकों का योगफल ३ से पूरा-पूरा बँट जाता है। इसलिए इनमें से प्रत्येक संख्या ३ से पूरी-पूरी बँट जाती है।

(ब) १८, ४५, ११७, ७८३, ३२०४ इत्यादि में से प्रत्येक संख्या के अंकों का योगफल ६ से पूरा-पूरा बँट जाता है। इसलिए इनमें से प्रत्येक संख्या ६ से पूरी-पूरी बँट जाती है।

(५) जिस संख्या की इकाई का अंक शून्य (०) हो वह १० से पूरी-पूरी बँट जाती है, जैसे ४६०

उपपत्ति :—४६० = ४६ दहाइयाँ।

चूँकि ४६० में ४६ दहाइयाँ हैं और प्रत्येक दहाई १० से पूरी बँट जाती है इसलिए ४६० भी १० से पूरी बँट जायगी।

(६) कोई भी संख्या संयुक्त संख्या से तब विभाजित होती है जब यह संयुक्त संख्या के प्रत्येक अभाज्य अपवर्तक से विभाजित होती है। जैसे ५४, ६ से विभाजित होती है क्योंकि वह ६ के अभाज्य अपवर्तक २ और ३ से विभाजित होती है।

(७) जिस संख्या के सम और विषम स्थानों के अंकों के योगफल का अन्तर शून्य (०) हो या ऐसी संख्या हो जो ११ से पूरी बँट जाय तो वह संख्या ११ से पूरी-पूरी बँट जाती है। (स्थान इकाई से आरम्भ किये जाते हैं)।

जैसे ४३८६, ६६४८२६

उपपत्ति :—४३८६ में, विषम स्थानों के अंकों का योगफल

= ६ + ३ = १२

सम स्थानों के अंकों का योगफल = ८ + ४ = १२

दोनों का अन्तर = ०

इसलिए ४३८६, ११ से पूरी-पूरी बँट जाती है।

६६४८३७ में,

विषम स्थानों के अंकों का योगफल = ७ + ८ + ६ = २४

सम स्थानों के अंकों का योगफल = ३ + ४ + ६ = १३

दोनों का अन्तर = २४ − १३ = ११

∴ ६६४८३७, ११ से पूरी-पूरी बँट जाती है।

विद्यार्थियों के सुभीते के लिए भाग की जाँच के नियम एकत्रित करके नीचे लिखे गये हैं:—

कोई संख्या भाग की जा सकती है:—

२ से, यदि उसका अन्तिम अंक ० है या २ से भाग हो सकता है।

३ से, यदि उसके अंकों का योगफल ३ से भाग हो जाये।

४ से, यदि उसके अन्तिम दो अंक शून्य हैं या ४ से भाग हो जायें।

५ से, यदि उसका अन्तिम अंक ० या ५ हो।

६ से, यदि वह २ व ३ से भाग हो जाये।

८ से, यदि उसके अन्तिम ३ अंक ० हों या ८ से भाग हो जायें।

९ से, यदि उसके अंकों का योगफल ९ से भाग हो जाये।

१० से, यदि उसका अन्तिम अंक ० हो।

११ से, यदि सम अंकों और विषम अंकों का अन्तर ० हो या ११ से भाग हो जाये।

१२ से, यदि वह ३ व ४ से भाग हो जाये।

१५ से यदि वह ३ व ५ से भाग हो जाये।

१६ से, यदि उसके अन्तिम ४ अंक १६ से भाग हो जाये।

२५ से, यदि उसके दो अन्तिम अंक २५ से भाग हो जाये।

१२५ से, यदि उसके तीन अन्तिम अंक १२५ से भाग हो जायें।

७ या १३ से, यदि किसी संख्या के अंकों को जहाँ तक हो सके तीन के समूहों में दक्षिण ओर से बाईं ओर तक विभाजित करके एक-एक छोड़

कर योग करने के बाद और छोटे को बड़े में से घटाने से शेष फल ० हो या १३ व ७ से भाग हो जाये।

उदाहरण :—५२११७ को १३ से भाग कर सकते हैं, क्योंकि ११७ व ५२ लगभग ३ अंक की संख्याएँ हैं और ११७ – ५२ = ६५, जो १३ से भाग हो सकता है।

प्रश्नावली ३

खंड क—नम्बर १—(१) ३१ तक की सब अभाज्य संख्याओं को लिखो।

क्रिया :—प्रथम सब संख्याओं को उनके नैजमान के अनुसार निम्न प्रकार लिखो :—

१, २, ३, ~~४~~, ५ ~~६~~, ७, ~~८~~, ~~९~~, ~~१०~~ ११, ~~१२~~, १३, ~~१४~~, ~~१५~~, ~~१६~~, १७ ~~१८~~, १९, ~~२०~~, ~~२१~~, ~~२२~~, २३, ~~२४~~, ~~२५~~, ~~२६~~, ~~२७~~, ~~२८~~. २९, ~~३०~~, ३१

इस प्रकार अभाज्य संख्याएँ २, ३, ५ के अपवर्त्यों को काटने से १, २, ३, ५, ७, ११, १३, १७, १९, २३, २९ और ३१ बची हैं।

∴ १ से ३१ तक की अभाज्य संख्याएँ १, २, ३, ५, ७, ११, १३, १७, १९, २३, २९ और ३१ हैं। **उत्तर**

सूचना :—हमने अभाज्य संख्या ५ तक ही ली है, क्योंकि ७ वर्ग जो कि ५ के बाद दूसरी अभाज्य संख्या है ४९ है जो दी हुई संख्या अर्थात् ३१ से अधिक है।

(२) ४५ तक की सब अभाज्य संख्याएँ लिखो।

(३) १५ और ८० के बीच की सब अभाज्य संख्याओं को ज्ञात करो।

(४) ५० से १०० की अभाज्य संख्याएँ लिखो।

(५) उन तीनों अभाज्य संख्याओं को लिखो जो ४० से बड़ी हों और उनकी इकाई ही में अन्तर हो।

खंड—ख नम्बर २–(६) ६० के अभाज्य गुणनखण्ड बताओ।

नियम :—इस संख्या को सबसे छोटी संख्याओं से जो उसको पूरा बाँट सकती हैं, बाँटो, फिर भागफल को और दूसरी छोटी संख्या से बाँटो। इसी प्रकार

पिछले भागफल को छोटी संख्या से पूरा बाँटते जाओ, जब तक कि भागफल स्वयं एक अभाज्य संख्या न रह जाये। तब सब भाजक और अन्त का भागफल उस दी हुई संख्या के अभाज्य गुणनखंड होंगे।

क्रिया :—६० = २ × २ × ३ × ५

∴ २, २, ३ और ५ दी हुई संख्या ६० के अभाज्य गुणनखंड हैं।

उत्तर

निम्नलिखित संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड निकालो :—

(७) ८४ (८) ६८ (९) ५३६

(१०) ३८६२ (११) ७३१५ (१२) ७२५७६०

नम्बर ३—(१३) ५०३ अभाज्य या संयुक्त कैसी संख्या है ?

क्रिया :—५०३ को २, ३, ५, ७, ११, १३, १७, १९, २३ से भाग देने से प्रत्येक दशा में कुछ न कुछ शेष रह जाता है, और हमको २३ से बड़ी अभाज्य संख्या से भाग देने की आवश्यकता नहीं है, क्योंकि इस दशा में भागफल २३ से कम है। और हम यह ऊपर ज्ञात कर चुके हैं कि संख्या ५०३ किसी दूसरी संख्या से जो २३ से कम है, नहीं बँट सकती;

∴ ५०३ अभाज्य संख्या है **उत्तर**

निम्न संख्याओं में कौन-कौन सी अभाज्य हैं ?

(१४) ६ (१५) २३ (१६) ५८ (१७) ८६

(१८) ११३ (१९) २१३ (२०) २२७ (२१) ५४१

(२२) वह बड़ी से बड़ी अभाज्य संख्या ज्ञात करो जिससे १८७ को भाग देने पर शेष कुछ न रहे।

खण्ड ग—नम्बर ४—(२३) वह अभाज्य संख्या बताओ जिससे ४३ को भाग देने से ३ शेष रह जाये।

क्रिया :—४३ − ३ = ४०

और ४० = २ × २ × २ × ५

∴ **अभीष्ट संख्या = ५** **उत्तर**

(२४) ६२६ को किस संख्या से भाग दें कि शेष ४ रहे ?

(२५) वह अभाज्य संख्याएँ बताओ जिनसे ११५७ को भाग देने से प्रत्येक दशा में २ शेष रहे।

(२६) २१६४६ कौन-कौन सी अभाज्य संख्याओं से बाँटा जा सकता है जिससे प्रत्येक दशा में १ शेष रहे ?

(२७) वह बड़ी से बड़ी अभाज्य संख्या ज्ञात करो जिससे २७६ को भाग देने पर शेष कुछ न रहे।

(२८) वह बड़ी से बड़ी तथा छोटी से छोटी अभाज्य संख्या ज्ञात करो जिनके द्वारा ६१३ को भाग देने पर ४ शेष रहे।

नम्बर ५—(२६) ४३❀४ ÷ ३ में फूल के स्थान पर कौन सा सबसे छोटा अंक होना चाहिये ?

क्रियाः—कोई भी संख्या ३ से जब ही पूरी बँट सकती है जब कि उसके अंकों का योगफल ३ से पूरा बँट जाय।

परन्तु ४ + ३ + ४ = ११

∴ फूल के स्थान पर सबसे छोटा अंक

= १२ − ११ = १ **उत्तर**

(३०) ३, ८, ७, ० से बनी हुई बड़ी से बड़ी और छोटी से छोटी संख्याएँ बताओ जो (अ) ३ से (ब) १० से (स) ६ से पूरी-पूरी विभाजित हो जायें।

(३१) निम्नलिखित भाग के प्रश्नों में बिना भाग दिये हुये शेष ज्ञात करो :—

(अ) १८६६२ ÷ ३ (ब) ६४१३ ÷ ५ (स) ८६५३ ÷ ८ (द) ६७३२ ÷ ६

(३२) निम्नलिखित पूरे भाग के प्रश्न हैं। रिक्त स्थानों में क्या होना चाहिये ?

(अ) ६३६❀१ ÷ ७ (ब) १६६४❀ ÷ ८

(स) ६३ ❀१४ ÷ ६ (द) ७१४❀८ ÷ ११

(३३) १००० से छोटी, सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है जो ११ से पूरी विभाजित हो जाये।

(३४) नीचे की संख्याओं में से कौन-कौन सी (अ) ४० (ब) ५० (स) २५ (द) ६० (य) १०० से पूरा-पूरी विभाजित हो सकती हैं ?

१५५०, १५७५, १२४०, १७००, ७११०

(३५) यदि निम्नलिखित संख्यायें ६ से पूरी बँट जायें तो फूल के स्थान पर अंक निश्चित करो:—

(अ) ३६५❀७ (ब) ४❀५७ (स) ४३❀७७६।

(३६) फूल के स्थान पर निम्नलिखित संख्याओं में वह अंक ज्ञात करो जिससे कि संख्याएँ ११ से पूरी बँट जायँ:—

(अ) ५❀२४५७ (ब) ८❀७ (स) ३६४५❀६

मिश्रित :—(३७) १ से १०० तक की सब अभाज्य संख्याएँ ज्ञात करो।

(उ० प्र०, १६४०)

(३८) अभाज्य संख्या किसे कहते हैं ? क्या २१७ अभाज्य संख्या है ?

(३६) यदि तीन क्रमिक विषम संख्याओं का योगफल १३५ हो तो संख्याएँ ज्ञात करो।

चौथा अध्याय

महत्तम समापवर्तक तथा लघुतम समापवर्त्य

महत्तम समापवर्तक

निम्नलिखित को ध्यानपूर्वक देखो :—

१२ के गुणनखंड १, २, ३, ४, ६, और १२ हैं।

१८ के गुणनखंड १, २, ३, ६, ६ और १८ हैं।

२४ के गुणनखंड १, २, ३, ४, ६, ८, १२, और २४ हैं।

उपरोक्त को ध्यानपूर्वक देखने से विदित है कि १, २, ३, और ६ ऐसे अपवर्तक हैं जो १२, १८ तथा २४ को पूरा-पूरा बाँट सकते हैं। अतः १, २,

३ और ६ में से प्रत्येक अपवर्तक १२, १८ तथा २४ का समापवर्तक है। परन्तु इनमें से ६ सबसे बड़ा समापवर्तक है जिसको हम १२, १८ तथा २४ का महत्तम समापवर्तक कहते हैं।

परिभाषा :—दो या दो से अधिक संख्याओं का **महत्तम समापवर्तक** वह सबसे बड़ी संख्या है जो उनमें से प्रत्येक को पूरा-पूरा बाँट सके।

इसको संक्षेप में म० स० लिखते हैं।

उदाहरण :—१२, १८, २४, का म० स० ज्ञात करो।

१२ = २ × २ × ३

१८ = २ × ३ × ३

२४ = २ × २ × ३ × २

म० स० = २ × ३ = ६

नियम :—दो या अधिक संख्याओं का म० स० उनके अभाज्य समापवर्तकों का गुणनफल होता है।

म० स० सम्बन्धी दो मुख्य नियम

(१) यदि कोई संख्या य, संख्या र तथा ल का भी गुणनखंड है तो वह (र + ल) तथा (र − ल) का भी गुणनखंड होगी।

जैसे, ६, ४२ और ७२ का गुणनखंड है तो वह उनके योगफल तथा अन्तर अर्थात् (४२ + ७२) = ११४ और (७२ − ४२) = ३० का भी गुणनखंड है।

(२) यदि क किसी संख्या र और ल का गुणनखंड है तो वह अ (र + ल) तथा ब (र − ल) का भी गुणनखंड होगा जब कि अ और ब दो संख्याएँ हैं।

जैसे १०, ५० और ४० का गुणनखंड है तो वह

३ (५० + ४०) = २७० तथा ७ (५० − ४०) = ७० का भी गुणनखंड है।

लघुतम समापवर्त्य

यदि हम किसी संख्या को १, २, ३, ४ इत्यादि से गुणा करते जायँ तो इस प्रकार प्राप्त गुणनफल उस संख्या के अपवर्त्य कहलाते हैं।

यदि दो या दो से अधिक संख्याओं के अपवर्त्य सामान्य हों तो वे उन संख्याओं के समापवर्त्य कहलाते हैं।

जैसे, २ के अपवर्त्य २, ४, ६, ८, १०, १२, १४, १६, १८,.........

और ३ के अपवर्त्य ३, ६, ९, १२, १५, १८, २१,.........

इन २ और ३ के अपवर्त्यों में ६, १२, १८, दोनों में समापवर्त्य हैं परन्तु इन सब में सब से छोटा समापवर्त्य ६ है जो २ और ३ का लघुतम समापवर्त्य है।

परिभाषा :—दो या दो से अधिक संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य वह छोटी से छोटी संख्या है जो उनमें से प्रत्येक से पूरी-पूरी विभाजित हो सके।

इसको संक्षेप में ल० स० भी लिखते हैं।

उदाहरण:—४, ६, ८, का ल० स० ज्ञात करो।

४ = २ × २ = $२^२$

६ = २ × ३ = २ × ३

८ = २ × २ × २ = $२^३$

ल० स० = $२^३$ × ३ = २४ उत्तर

नियम :—दो या दो से अधिक संख्याओं का ल० स० वह छोटी से छोटी संख्या होती है जो उनके सामान्य तथा असामान्य प्राथमिक खंडों की बड़ी से बड़ी घात का गुणनफल होता है।

दो संख्याओं के म० स० तथा ल० स० का सम्बन्ध

१२ और १८ का म० स० = ६

१२ और १८ का ल० स० = ३६

परन्तु १२ × १८ = २१६

और ६ × ३६ = २१६

म० स० × ल० स० = संख्याओं का गुणनफल ।

इससे यह परिणाम भी निकलता है कि दो संख्याओं का ल० स० उन संख्याओं के गुणनफल को उनके म० स० से भाग देने से प्राप्त होता है ।

जैसे, १२ और १८ का ल० स० $= \frac{१२ \times १८}{६} = ३६$

इस सम्बन्ध को निम्न प्रकार भी सिद्ध कर सकते हैं :—
मान लिया कि संख्याएँ क और ख हैं और उनका म० स० = म और ल० स० = ल

तो सिद्ध करना है कि म × ल = क × ख ।

मान लिया कि क और ख को म से भाग देने पर भागफल क्रमशः अ और ब आते हैं ।

$\therefore \frac{क}{म} = अ \; ; \; \therefore क = अ \times म$

और $\frac{ख}{म} = ब \; ; \; \therefore ख = ब \times म$

परन्तु क और ख का ल० स० = ल

और अ × म और ब × म का ल० स० = अ × ब × म ;

$\therefore ल = अ \times ब \times म$

दोनों ओर म से गुणा करने पर,

$म \times ल = अ \times ब \times म \times म$

$= (अ \times म) \times (ब \times म)$

$= क \times ख \; [\because अ \times म = क$ और $ब \times म = ख]$

प्रश्नावली ४

खण्ड क—नम्बर १–(१) वह धन की कौन सी सबसे बड़ी संख्या है जो ५ रु० ८ आ० और ८ रु० ४ आ० दोनों में पूरी बार सम्मिलित है ?

क्रिया :—

५ रु० ८ आ० = ८८ आ०, ८ रु० ४ आ० = १३२ आ०

अब, ८८ = २ × २ × २ × ११ = $२^३$ × ११

और १३२ = २ × २ × ३ × ११ = $२^२$ × ३ × ११

∴ ८८ और १३२ का म० स० = $२^२$ × ११ = ४४

∴ अभीष्ट बड़े से बड़ा धन = ४४ आ० या २ रु० १२ आ० उत्तर

(२) वह धन की कौन-सी बड़ी से बड़ी संख्या है जो ७ पौंड ७ शि० ६ पैं० और १२ पौंड १७ शि० ६ पैं० को पूरा भाग दे सके ?

(३) दो पीपों में क्रमशः ५४० और ७२० गैलन पानी आता है। वह कौन सा बड़े से बड़ा बर्तन है जो पीपों को खाली कर सके ?

(४) मेरे पास डोरी के दो टुकड़े हैं। उनमें एक १२ इञ्च और दूसरा ८ इञ्च लम्बा है। मैं इन डोरियों को किस प्रकार काटूँ कि उनके टुकड़े बराबर के हों, और बड़े से बड़े कट सकें ?

(५) किसी चट्टान पर ४ घूमनेवाली रोशनी हैं। एक १ मि० २० से० में, दूसरी २ मि० २५ से० में, तीसरी ३ मि० ३० से० में और चौथी ४ मि० ४० सें० में घूम जाती है। एक आदमी उन चारों को एक साथ जलती हुई १० बजे देखता है। तो फिर वे इस प्रकार कब दिखाई देंगी।

नम्बर—२ (६) एक किसान के पास १७१८ भेड़ें और ६८६ मेमने हैं। वह उन भेड़ों और मेमनों को पृथक-पृथक समूह में समान संख्या रखकर विभाजित करता है। यदि उसने बड़े से बड़े जितने समूह बन सकते हैं, बनाए हों तो समूहों की संख्या बताओ।

क्रिया :—प्रत्येक समूह के पशुओं की बड़ी से बड़ी संख्या १७९८ और ९८६ का म० स० है जो ५८ है।

∴ प्रत्येक समूह के पशुओं की बड़ी से बड़ी संख्या ५८ हुई।

∴ कुल समूह $= \left(\frac{१७९८}{५८} + \frac{९८६}{५८}\right)$

$= ३१ + १७ = ४८$ उत्तर

(७) एक पाठशाला का अध्यापक अपने विद्यार्थियों को जिनमें २२१ बालक और १४३ बालिकाएँ हैं बड़ी से बड़ी संख्या की बराबर कक्षाओं में इस प्रकार विभाजित करना चाहता है कि प्रत्येक बालकों की कक्षाओं में उतने ही विद्यार्थी हों जितने कि बालिकाओं की कक्षा में हैं। तो कक्षाओं की संख्या बताओ।

(८) एक फल वाला १३१४४ आमों और १३८८८ आड़ुओं को इस प्रकार सन्दूकों में बन्द करना चाहता है कि प्रत्येक में आम या आड़ू की संख्या बराबर हो। आमों और आड़ुओं की वह बड़ी से बड़ी संख्या बताओ जो प्रत्येक सन्दूक में रखी जा सके, और यह भी कि इसके लिए कितने सन्दूकों की आवश्यकता है।

नम्बर ३—(९) एक स्त्री ने कुछ सेव १ रु० १ आ० के मोल लिये और उनमें से कुछ को ११ आ० में बिना लाभ के बेच दिया तो यह सिद्ध करो कि अब भी उसके पास कम से कम ६ सेव शेष हैं।

क्रिया :—१ रु० १ आ० = १७ आ० = १७ × १२ × २० पाई

११ आ० = ११ × १२ = १३२ पाई

२०४ और १३२ का म० स० = १२

∴ अधिक से अधिक एक सेब का मूल्य = १२ पाई

∴ कम से कम खरीदे हुए सेवों की संख्या = २०४ ÷ १२ = १७

और कम से कम बेचे हुए सेवों की संख्या = १३२ ÷ १२ = ११

कम से कम बचे हुये सेवों की संख्या = १७ − ११ = ६ उत्तर

(१०) मैंने कुछ पुस्तकें १५ रु० १२ आ० ६ पाई में मोल लीं और उनमें से कुछ को क्रय-मूल्य पर ही १५ रु० १ आ० में बेच दिया तो सिद्ध करो कि मेरे पास अब भी २३ पुस्तकें शेष हैं।

(११) एक मजदूर कुछ दिन के लिए २६ रु० १ आ० पर रखा गया परन्तु कुछ दिन अनुपस्थित रहने के कारण उसको २२ रु० ४ आ० ६ पाई मिले तो सिद्ध करो कि उसका प्रतिदिन का वेतन १५ आ० ६ पाई से अधिक नहीं था।

नम्बर ४—(१२) वह बड़ी-से-बड़ी संख्या बताओ जिससे ३६२, ६३३ और ३१० को क्रमशः भाग दें तो क्रमशः २, ३ और ४ शेष रहें।

क्रिया :— ∵ ३६२ को भाग देने पर शेष २ रहता है।

∴ सबसे बड़ी संख्या से (३६२ − २) या ३६० पूरा बँट जाना चाहिए।

इसी प्रकार यही बड़ी-से-बड़ी संख्या (६३३ − ३) अर्थात् ६३० को और (३१० − ४) अर्थात् ३०६ को पूरा बाँट देगी।

∴ अभीष्ट बड़ी-से-बड़ी संख्या ३६०, ६३० और ३०६ का म० स० १८ है। **उत्तर**

(१३) वह बड़ी-से-बड़ी संख्या बताओ जिससे यदि ६६४, १२३८ और २४०० को भाग दें तो क्रमशः ४१, ३१ और ५१ शेष रहें।

(१४) वह बड़ी-से-बड़ी संख्या बताओ जिससे यदि ३६००, ५४१८, ७३३७ और १००६४ को भाग दें तो प्रत्येक दशा में ६५ शेष रहें।

खंड ख—नम्बर ५—(१५) वह सबसे बड़ी संख्या बताओ जिससे १२२८८, १६१३३ और २८२०० को भाग देने पर प्रत्येक दशा में शेष एक सा ही रहे।

क्रिया :—मान लिया प्रत्येक दशा में 'अ' शेष रहता है। तब (१२२८८—अ), (१६१३३—अ) और (२८२००—अ) उस संख्या से पूरी

क्रिया :—प्रत्येक समूह के पशुओं की बड़ी से बड़ी संख्या १७६८ और ६८६ का म० स० है जो ५८ है।

∴ प्रत्येक समूह के पशुओं की बड़ी से बड़ी संख्या ५८ हुई।

∴ कुल समूह = $(\frac{१७९८}{५८} + \frac{९८६}{५८})$

= ३१ + १७ = ४८ उत्तर

(७) एक पाठशाला का अध्यापक अपने विद्यार्थियों को जिनमें २२१ बालक और १४३ बालिकाएँ हैं बड़ी से बड़ी संख्या की बराबर कक्षाओं में इस प्रकार विभाजित करना चाहता है कि प्रत्येक बालकों की कक्षाओं में उतने ही विद्यार्थी हों जितने कि बालिकाओं की कक्षा में हैं। तो कक्षाओं की संख्या बताओ।

(८) एक फल वाला १३१४४ आमों और १३८८८ आडुओं को इस प्रकार सन्दूकों में बन्द करना चाहता है कि प्रत्येक में आम या आड़ू की संख्या बराबर हो। आमों और आडुओं की वह बड़ी से बड़ी संख्या बताओ जो प्रत्येक सन्दूक में रखी जा सके, और यह भी कि इसके लिए कितने सन्दूकों की आवश्यकता है।

नम्बर ३—(६) एक स्त्री ने कुछ सेव १ रु० १ आ० के मोल लिये और उनमें से कुछ को ११ आ० में बिना लाभ के बेच दिया तो यह सिद्ध करो कि अब भी उसके पास कम से कम ६ सेब शेष हैं।

क्रिया :—१ रु० १ आ० = १७ आ० = १७ × १२ × २० पाई

११ आ० = ११ × १२ = १३२ पाई

२०४ और १३२ का म० स० = १२

∴ अधिक से अधिक एक सेब का मूल्य = १२ पाई

∴ कम से कम खरीदे हुए सेवों की संख्या = २०४ ÷ १२ = १७

और कम से कम बेचे हुए सेवों की संख्या = १३२ ÷ १२ = ११

कम से कम बचे हुये सेवों की संख्या = १७ − ११ = ६ उत्तर

(१०) मैंने कुछ पुस्तकें १५ रु० १२ आ० ६ पाई में मोल लीं और उनमें से कुछ को क्रय-मूल्य पर ही १५ रु० १ आ० में बेच दिया तो सिद्ध करो कि मेरे पास अब भी २३ पुस्तकें शेष हैं।

(११) एक मजदूर कुछ दिन के लिए २६ रु० १ आ० पर रखा गया परन्तु कुछ दिन अनुपस्थित रहने के कारण उसको २२ रु० ४ आ० ६ पाई मिले तो सिद्ध करो कि उसका प्रतिदिन का वेतन १५ आ० ६ पाई से अधिक नहीं था।

नम्बर ४—(१२) वह बड़ी-से-बड़ी संख्या बताओ जिससे ३६२, ६३३ और ३१० को क्रमशः भाग दें तो क्रमशः २, ३ और ४ शेष रहें।

क्रिया :— ∵ ३६२ को भाग देने पर शेष २ रहता है।

∴ सबसे बड़ी संख्या से (३६२ — २) या ३६० पूरा बँट जाना चाहिए।

इसी प्रकार यही बड़ी-से-बड़ी संख्या (६३३ — ३) अर्थात् ६३० को और (३१० — ४) अर्थात् ३०६ को पूरा बाँट देगी।

∴ अभीष्ट बड़ी-से-बड़ी संख्या ३६०, ६३० और ३०६ का म० स० १८ है।

उत्तर

(१३) वह बड़ी-से-बड़ी संख्या बताओ जिससे यदि ६६४, १२३८ और १४०० को भाग दें तो क्रमशः ४१, ३१ और ५१ शेष रहें।

(१४) वह बड़ी-से-बड़ी संख्या बताओ जिससे यदि ३६००, ५४१८, ७३३७ और १००६४ को भाग दें तो प्रत्येक दशा में ६५ शेष रहें।

खंड ख—नम्बर ५—(१५) वह सबसे बड़ी संख्या बताओ जिससे १२२८८, १६१३२ और २८२०० को भाग देने पर प्रत्येक दशा में शेष एक सा ही रहे।

क्रिया :—मान लिया प्रत्येक दशा में 'अ' शेष रहता है। तब (१२२८८—अ), (१६१३२—अ) और (२८२००—अ) उस संख्या से पूरी

बँट जाती हैं; परन्तु यदि कोई दो संख्यायें किसी एक संख्या से पूरी बँट जाती हैं तो उनका योगफल या अन्तर भी उस संख्या से पूरा बँट जायगा।

∴ [(१६१३६—अ) —(१२२८८—अ)] और

[(२८२००—अ)—(१२२८८—अ)]

अर्थात् ६८५१ और १५६१२ भी उस संख्या से पूरे-पूरे बँट जायेंगे।

∴ अभीष्ट सब से बड़ी संख्या ६८५१ और १५६१२ का म० स० २२१ है।

उत्तर

(१६) वह बड़ी से बड़ी संख्या बताओ जिससे १५१, १७५ व २३५ को भाग देने पर समान शेष रहे।

(१७) वह बड़ी से बड़ी संख्या बताओ जिससे २६१, ६२२ और १३८१ को भाग देने पर समान शेष रहे।

(१८) वह कौन-सी सब से बड़ी संख्या है जिससे १४२४०८, १५३५६६ और १६६४०२ को भाग देने पर समान शेष रहता है।

नम्बर ६—(१९) दो संख्याओं का गुणनफल ३६०० है और उनका म० स० ५ है तो ऐसी संख्याओं के सम्भव जोड़ों को ज्ञात करो।

क्रिया :—मान लिया कि उन संख्याओं को ५ से भाग देने पर क्रमशः 'म' और 'न' भागफल प्राप्त होते हैं।

तब, प्रथम संख्या = ५ म

और द्वितीय संख्या = ५ न

∴ २५ म न = ३६०० (∵ दोनों संख्याओं का गुणनफल = ३६००)

∴ म न = १४४

अब ऐसी संख्याओं के जोड़े जिनका गुणनफल १४४ है।

१२ × १२, १६ × ९, २४ × ६, १८ × ८, ३ × ४८, ४ × ३६, २ × ७२, १ × १४४ है।

परन्तु इनमें से केवल, (१६ × ६) और १ × १४४) को छोड़कर शेष सब को पृथक कर दिया क्योंकि वे आपस में अभाज्य नहीं हैं।

∴ अभीष्ट जोड़े (५ × १६, ५ × ६) और (५ × १, ५ × १४४)

अर्थात् (८०, ४५) और (५, ७२०) है। उत्तर

सूचना :—संख्यायें परस्पर अभाज्य तब कही जाती हैं जब उनमें एक के अतिरिक्त और कोई समापवर्तक नहीं होता।

(२०) दो संख्याओं का गुणनफल ८६४० है और उनका म० स० २४ है, तो उन संख्याओं के सब सम्भव जोड़ों को बताओ।

(२१) दो संख्याओं के उन सब जोड़ों को बताओ जिनका गुणनफल ११५३२ है और म० स० ३१ है।

नम्बर ७—(२२) दो संख्याओं का योगफल १६२ है और उनका म० स० १८ है तो उन दोनों संख्याओं को बताओ।

क्रिया :—मान लिया कि इन दोनों संख्याओं को १८ से भाग देने पर भागफल क्रमशः 'अ' और 'ब' है।

तब प्रथम संख्या = १८ अ

और द्वितीय संख्या = १८ ब

∴ प्रथम संख्या + द्वितीय = १८ (अ + ब)

∴ १८ (अ + ब) = १६२ (∵ दोनों संख्याओं का योगफल = १६२)

∴ अ + ब = ९

∴ जिन संख्याओं का योगफल ९ है, (१, ८), (२, ७), (३, ६) और (४, ५) हैं। इन जोड़ों में से तीसरे जोड़े को काट दिया क्योंकि ३ और ६ परस्पर अभाज्य नहीं हैं।

∴ अभीष्ट जोड़े (१८ × १) (१८ × ८), (१८ × २), (१८ × ७) तथा (१८ × ४) (१८ × ५) अर्थात् (१८, १४४), (३६, १२६) तथा (७२, ९०) हैं। उत्तर

(२३) दो संख्याओं का योगफल १५ है और उनका म० स० ३ है। तो ऐसी संख्याओं के सब सम्भव जोड़ों को बताओ।

नम्बर ८—(२४) दो संख्याओं का म० स० निकालने में अन्त का भाजक ८ है, भागफल २, ४, २ और ४ हैं तो उन संख्याओं को बताओ।

क्रिया:—इसी प्रश्न को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं :—

```
अ )    ( २
  ब ) अ ( ४
     स ) ब ( २
        ८ ) स ( ४
```

भाज्य = भाजक × भागफल + शेष

∴ अन्त का भाज्य 'स' = ८×४ या ३२

किन्तु अन्त का भाज्य 'स' तीसरा भाजक है और भागफल २ तथा शेष ८ है।

∴ तीसरा भाज्य 'ब' = ३२ × २ + ८ = ७२

परन्तु तीसरा भाज्य 'ब' दूसरा भाजक है और भागफल ४ तथा शेष 'स' या ३२ है।

∴ दूसरा भाज्य 'अ' = ७२ × ४ + ३२ = ३२०

परन्तु 'अ' पहिला भाज्य भी है और यहाँ भागफल २ और शेष 'ब' या ७२ है।

∴ पहला भाज्य = ३२० × २ + ७२ = ७१२

∴ अभीष्ट संख्यायें ३२० और ७१२ हैं। उत्तर

(२५) दो संख्याओं का म० स० निकालने में भागफल क्रमशः १, ७, ३, २ हैं और अन्त का भाजक ४६ है, तो उन संख्याओं को बताओ।

(२६) दो संख्याओं का म० स० निकालने में अन्त का भाजक २७ और भागफल क्रमशः ३, ५, १ और ६ हैं, तो उन संख्याओं को बताओ।

नम्बर ९—(२७) एक कमरे में जो कि २७६ फुट लम्बा और २०४ फुट

चौड़ा है, संगमरमर का फर्श लगाने में कम से कम कितने वर्गाकार पत्थरों के टुकड़ों की आवश्यकता है।

क्रियाः—संगमरमर के टुकड़ों की कम से कम संख्या तब ही हो सकती है जबकि उनका बड़े से बड़ा आकार हो।

∴ प्रश्न यह है कि २७६ और २०४ को पूरा बाँटने वाली बड़ी से बड़ी कौन सी संख्या है।

बड़ी से बड़ी संख्या २७६ व २०४ का म० स० = १२ है।

किन्तु यह उस वर्गाकार टुकड़े की लम्बाई तथा चौड़ाई हुई।

∴ उसका क्षेत्रफल = १२ × १२ वर्ग फुट या १४४ वर्ग फुट हुआ।

∴ ऐसे टुकड़ों की कम से कम संख्या = फर्श का क्षेत्रफल ÷ टुकड़े का क्षेत्रफल

$$= \frac{२७६ \times २०४}{१४४} = ३९१$$ उत्तर

(२८) एक बड़े कमरे का जो १८ फुट ८ इंच × १५ फुट ९ इञ्च है, फर्श कराने में कम से कम कितने वर्गाकार पत्थर के टुकड़ों की आवश्यकता होगी ?

(२९) बड़े से बड़े पत्थर के उस वर्गाकार टुकड़े का क्या क्षेत्रफल होगा जिनसे कि एक दालान में जो १६ गज २ फुट लम्बा और १२ गज चौड़ा है फर्श किया जा सकता है।

लघुतम समापवर्त्य

नम्बर १० –(३०) वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जिसको १५, २१, २८ व ३५ से भाग देने से प्रत्येक दशा में ८ शेष रहें।

क्रिया :—१५, २१, २८ और ३५ का ल० स० = ४२०

∴ अभीष्ट छोटी से छोटी संख्या = ४२० + ८ = ४२८ उत्तर

(३१) वह छोटी से छोटी कौन सी संख्या है जिसको १२, २०, २५ और ३२ से पृथक्-पृथक् भाग दिया जाय तो प्रत्येक दशा में ७ शेष रहे।

(३२) वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जिसमें यदि ६ जोड़े जायें तो ५१ १८७, १५३ और १६५ से पूरी तरह बँट जाय।

नम्बर ११–(३३) १००० और २००० के बीच की छोटी से छोटी संख्या बताओ जो ६, ८, १५ और २० से पूरी-पूरी बँट जाय।

क्रिया :—६, ८, १५ और २० का ल० स०	= १२०
परन्तु १२० × ८	= ९६०
और १२० × ९	= १०८०
∴ छोटी से छोटी संख्या	= १०८० उत्तर

सूचना :—१००० से कुछ ही बड़ी संख्या लेने के लिए ल० स० को ९ से गुणा किया गया है।

(३४) ३०,००० और ३१,००० के बीच की छोटी से छोटी कौन सी संख्या है जो ९७ और ७९ से पूरी बँट जाय ?

(३५) ५००००० और ६००००० के बीच की छोटी से छोटी कौन सी संख्या है जो २६५, ३८५ और ४६५ से पूरी बँट जाय ?

(३६) ४ अंकों की वह सब से बड़ी कौन-सी संख्या है जिसको यदि ५२३१ में जोड़ दिया जाय तो योगफल १२, १५, २७, ३२ और ४० से पूरा बँट जाय ?

नम्बर १२–(३७) गोलियों की वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जिनमें से प्रत्येक का १$\frac{४}{५}$ औंस भार हो और वह पौंड की पूर्ण संख्याओं को तौल सके।

क्रिया :—१ पौंड = १६ औंस

$\frac{९}{५}$ औंस और $\frac{१६}{१}$ औंस का ल० स०

$$= \frac{\text{९ और १६ का ल० स०}}{\text{५ और १ का म० स०}} = \frac{१४४}{१} \text{ औंस} = १४४ \text{ औंस}$$

∴अभीष्ट गोलियों की संख्या = $१४४ \div \frac{९}{५} = ८०$ उत्तर

आवश्यक सूचना :—

(१) भिन्नों का ल० स० = $\frac{\text{अंशों का ल० स०}}{\text{हरों का म० स०}}$

(२) भिन्नों का म० स० = $\frac{\text{अंशों का म० स०}}{\text{हरों ल० क० दू}}$

(३८) वह छोटी से छोटी पूर्ण संख्या ज्ञात करो जिसको $\frac{४}{५}$, $\frac{३}{१०}$ व $\frac{१२}{३५}$ से भाग देने से प्रत्येक दशा में भागफल पूर्ण संख्या हो।

(३९) सप्ताहों की वह सबसे छोटी संख्या बताओ जिनमें एक मजदूर अर्धगनी की पूर्ण संख्या कमा सके जब कि उसकी मजदूरी $७\frac{१}{२}$ शि० प्रति सप्ताह है।

(४०) दो पटरियों में इंच छः और आठ भागों में बँटे हुए हैं। वह एक दूसरे के बराबर इस प्रकार रखे गये हैं कि उनके शून्य के अंक एक दूसरे के सामने हैं। तो कितनी दूरी पर फिर उनके चिह्न एक दूसरे के सामने पड़ेंगे?

नम्बर १३—(४१) तीन घन्टे एक साथ बजने आरम्भ होते हैं। वे क्रम से $१\frac{२}{३}$, $२\frac{३}{४}$, $५\frac{५}{८}$ सेकिंड की देरी से बजते हैं। यदि वे १५ मिनट लगातार इसी प्रकार बजते रहें तो इतने समय में वे कितनी बार एक साथ बजेंगे?

क्रिया :— घण्टों के एक साथ बजने का सबसे कम समय

$$= १\frac{२}{३}, २\frac{३}{४}, ५\frac{५}{८} \text{ से० का ल० स०}$$

$$= \frac{\text{अंशों का ल० स०}}{\text{हरों का म० स०}} = \frac{४५}{१} = ४५ \text{ से०}$$

∴१५ मि० या (१५ × ६०) सेकिंड में उनके एक ही साथ बजने की संख्या।

$$= (१५ \times ६० \div ४५) = \frac{१५ \times ६०}{४५}$$

$$= २०$$ उत्तर

(४२) घड़ी का लटकन ३·२ से० में ६ बार हिलता है, और दूसरा लटकन ३·६ से० में आठ बार। यदि उनको एक ही साथ चलाया जाय तो वे एक घन्टे में कितनी बार एक साथ टिक-टिक करेंगे ?

(४३) तीन घन्टे क्रमशः १·२, १·८ व २·७ सेकिंड के अन्तर से एक साथ बजने आरम्भ हुए, तो बताओ उनके एक साथ बजने से पहले उनमें से प्रत्येक कितनी बार बज चुकेगा।

खंड ग नम्बर १४—(४४) एक लड़के को किसी जीने पर दो-दो सीढ़ियाँ चढ़ने में अन्त में एक, तीन-तीन चढ़ने में अन्त में दो और चार-चार चढ़ने में अन्त में तीन सीढ़ी शेष रहती हैं। यदि सीढ़ियों की संख्या ४० और ५० के बीच में हो तो बताओ कि उस जीने में कुल कितनी सीढ़ियाँ हैं।

क्रिया :—यदि जीने में एक सीढ़ी और होती तो प्रत्येक दशा में वह एक बार और चढ़ सकता था।

∴सीढ़ियों की संख्या में यदि १ और जोड़ दिया जाय तो वे २, ३ व ४ से पूरी-पूरी बँट सकती हैं।

अब २, ३ व ४ का ल० स० = १२

किन्तु सीढ़ियाँ ४० और ५० के बीच में हैं, इसलिए सीढ़ियों की अभीष्ट संख्या = १२ × ४ − १ = ४८ − १ = ४७ उत्तर

सूचना :—ऐसे प्रश्नों में प्रत्येक संख्या और उसी के शेष में जो अन्तर होता है वही अन्तर दूसरी संख्याओं और उनके शेषों में होता है।

(४५) वह छोटी से छोटी कौन सी संख्या है जिसको २६, ३६, ४८ से भाग देने पर शेष क्रमशः २२, ३५ व ४४ रहते हैं ?

(४६) जब सिक्कों की एक संख्या को १८, २३, २८ व ३३ की ढेरी में रखा जाता है, तो क्रमशः १२, १७, २२ व २७ सिक्के बच जाते हैं, तो सिक्कों की छोटी से छोटी संख्या ज्ञात करो।

(४७) लड़कों की वह सबसे छोटी कौन-सी संख्या है कि जब उनको १०,

२०, ३०, ४० व ५० के समूह में बाँटा जाय तो क्रमशः ५, १५, २५, ३५ व ४५ शेष रहते हैं। वह संख्या २ और ३ हजार के बीच में होनी चाहिए।

नम्बर १५–(४८) एक रिसाले में कम से कम कितने सिपाही हो सकते हैं जिनसे २, ३, ४, ६ व ८ आदमी की गहरी पंक्ति बन सके और एक ठोस वर्ग भी बन सके ?

क्रिया :—२, ३, ४, ६ व ८ का ल० स० = २४ = २^{२} × २ × ३

अब प्रश्न यह है कि वह छोटी से छोटी कौन सी संख्या है जिससे २४ को गुणा करने पर गुणनफल एक पूर्ण वर्ग बन सके।

किन्तु पूर्ण वर्ग वह संख्या कहलाती है जो दो समान खण्डों में विभाजित हो सके। जैसे ३६ = ६ × ६ (यह पूर्ण वर्ग है)

∵ २४ को २ × ३ अर्थात् ६ से गुणा करना चाहिये, जिससे कि पूर्ण वर्ग बन जाए।

∴ फौज के सिपाहियों की सबसे छोटी संख्या = २४ × ६ = १४४ उत्तर

(४६) फौज के सिपाहियों की वह सबसे छोटी संख्या बताओ जिससे १०, १५ व २५ आदमियों की गहरी पंक्तियाँ बन सकें और उनका एक ठोस वर्ग भी बन सके।

(५०) वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जो ६, १०, १५ व १८ से पूरी-पूरी बँट सके और एक पूर्ण वर्ग भी हो।

नम्बर १६–(५१) वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जिसको ५, ६, ८, ९ व १२ से भाग देने पर प्रत्येक दशा में १ शेष रहे और १३ से भाग देने पर शेष कुछ न रहे।

क्रिया :—५, ६, ८, ९ व १२ का ल० स० = ३६०

∴ अभीष्ट संख्या = ३६० अ + १
= (१३ × २७ + ९) अ + १
= (१३ × २७ अ) + (९ अ + १)

अब वह संख्या १३ से पूर्णतः विभाजित होनी चाहिए।

परन्तु 'अ' का कुछ भी मूल्य हो, १३ × २७ अ सदैव १३ से विभाजित हो जायगा। क्यों ?

इसलिए अब यह प्रश्न शेष रहता है कि यहाँ 'अ' का सबसे कम क्या मान हो जिससे ६ अ + १ को १३ से विभाजित किया जा सके।

यदि अ का मूल्य १, २, ३ या ४ इत्यादि माना जाय तो ज्ञात होगा कि अ, १० के बराबर होना चाहिये।

∴ अभीष्ट संख्या = ३६० × १० + १
= ३६०१ उत्तर

सूचना :—ध्यान दो कि ३६० = १३ × २७ + ६

१३ ऐसी संख्या है जो दूसरी दशा में इसको पूरा बाँट देती है।

(५२) वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जो यदि २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९ व १० से बाँटी जाय तो प्रत्येक दशा में १ शेष रहे, परन्तु यदि ११ से बाँटी जाय तो कुछ न बचे।

(५३) कंकरों का एक ढेर है जिसमें से ५५ के पूरे-पूरे समूह बनाए जा सकते हैं, परन्तु यदि उस ढेर में से १८, २७ या ३० के समूह बनाए जाएँ तो प्रत्येक दशा में १० शेष रहते हैं, तो उस ढेर में कम से कम कंकरों की क्या संख्या है ?

नम्बर १७—(५४) दो संख्याओं का ल० स० २९२९०९२६० है और म० स० ४२० है। यदि उनमें से एक संख्या २८१४० हो तो दूसरी संख्या बताओ।

क्रिया :—ल० स० × म० स० = प्रथम संख्या × द्वितीय संख्या

∴ २९२९०९२६० × ४२० = २८१४० × द्वितीय संख्या

$$\text{द्वितीय संख्या} = \frac{२९२९०९२६० \times ४२०}{२८१४०} = ४३७१७८०$$

उत्तर

(५५) दो संख्याओं का म० स० और ल० स० क्रमशः १० और ३००३० हैं। उनमें से एक संख्या ७७० है, तो दूसरी संख्या बताओ।

(५६) दो संख्याओं का ल० स० ५६७ है और उनका म० स० ९ है, तो वे संख्यायें बताओ जिनमें परस्पर १८ का अन्तर है।

मिश्रित—(५७) तीन अंकों की वह संख्याएँ ज्ञात करो जिनका म० स० ३१० तथा ल० स० १८६० है। (उ० प्र०, १६३८)

(५८) (क) यदि दो संख्याओं 'क' और 'ख' का ल० स० ल हो तथा म० स० म हो तो सिद्ध करो :—क ख = ल म।

(ख) दो संख्याओं का ल० स० उनके म० स० से १२ गुना है। तथा उनके ल० स० और म० स० का योग फल ४०३ है। यदि उनमें से एक संख्या ६३ है तो दूसरी ज्ञात करो। (उ० प्र०, १६४१)

(५६) वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करो जिसके द्वारा ६२, १२८ व २२८ को भाग देने पर समान शेष रहे। (उ० प्र०, १६४२)

(६०) ५६, १२६ तथा ६८ का ल० स० इनके म० स० का कितना गुना है। (उ० प्र०, १६४३)

(६१) चार घन्टे ३२, ३५, ४५ तथा ६० सेकन्ड के अन्तर से बजते हैं। यदि वह एक साथ बजने शुरू हों तो कितने समय बाद फिर एक साथ बजेंगे। (उ० प्र०, १६४४)

(६२) १४, ३५, ४० तथा १०० से पूर्णतया विभाजित होने वाली छोटी से छोटी संख्या क्या है? इन संख्याओं से पूर्णतया विभाजित होने वाली पूर्ण वर्ग संख्या भी ज्ञात करो। (उ० प्र०, १६४५)

(६३) १८०, १६८ तथा १३२ का म० स० ज्ञात करो।
(उ० प्र०, १६४६)

(६४) वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करो जिसको ५१६१ तथा ५८५४ को विभाजित करने पर ४ शेष रहे। इन संख्याओं से पूर्णतया विभाजित होने वाली छोटी से छोटी संख्या भी ज्ञात करो। (उ० प्र०, १६४७)

(६५) वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करो जिससे ५६७० और ५२६० को भाग देने पर क्रम से ७ और ६ शेष रहें। (उ० प्र०, १६४८)

(६६) किसी पुस्तकालय की पुस्तकों की संख्या का $\frac{१}{६}$ गणित की पुस्तकें हैं, शेष का $\frac{३}{५}$ कहानियों की। अब जो शेष रहीं उनका $\frac{८}{९}$ इतिहास की और

शेष पुस्तकें विज्ञान की हैं। इन शर्तों को पूरा करते हुए उस पुस्तकालय में कम से कम कितनी पुस्तकें होनी चाहिये ?

पाँचवाँ अध्याय

सरल भिन्न

भिन्नों में अधिकतर कोष्ठकों का प्रयोग होता है। कोष्ठक चार प्रकार के होते हैं—

(१) रेखाबन्धनी ——
(२) सबसे छोटा कोष्ठक ( )
(३) बिचला कोष्ठक { }
(४) सबसे बड़ा कोष्ठक [ ]

ऐसी भिन्नों को सरल करने में जिनमें कोष्ठकों और दूसरे चिन्हों का प्रयोग हुआ हो निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना चाहिये :—

(१) सबसे पहले रेखाबन्धनी के नीचे लिखे हुए पदों को खोलो, इसके पश्चात् छोटे कोष्ठक को, फिर बिचले और अन्त में बड़े कोष्ठक वाले पद को खोलो।

(२) फिर 'का' में सम्मिलित पदों को खोलो।
(३) फिर भाग की क्रिया करो।
(४) इसके पश्चात् गुणन की क्रिया करो।
(५) अन्त में योग और अन्तर की क्रियाएँ करो।

टिप्पणी :—यदि किसी कोष्ठक के पहले ऋण (−) चिन्ह हो तो कोष्ठक को हटाते समय भीतर वाले सब पदों के धन चिन्ह ऋण चिन्ह में और ऋण चिन्ह धन चिन्ह में बदल जायेंगे।

सूचना :—चिह्न × और ÷ केवल उन संख्याओं के लिए प्रयुक्त होते हैं जो इनके बाद में लिखी जाती हैं।

इसको सरलता से स्मरण रखने के लिये एक काल्पनिक शब्द 'कोकाभागुयोघ' को ध्यान में रखिये।

इसमें 'को' कोष्ठक के लिए प्रयोग हुआ है।

'का'	का	,,	,,
'भा'	÷ (भाग)	,,	,,
'गु'	× (गुणन)	,,	,,
'यो'	+ (योग)	,,	,,
'घ'	− (घटाना)	,,	,,

प्रश्नावली ५

खंड क—नम्बर १—(१) $५\frac{१}{२} - \left[२\frac{१}{३} \div \left\{\frac{३}{४} - \frac{१}{२}\left(\frac{२}{३} - \overline{\frac{१}{६} + \frac{१}{८}}\right)\right\}\right]$ **को सरल करो।**

क्रिया :—दी हुई पदसंहति

$$= \frac{११}{२} - \left\{\frac{७}{३} \div \left\{\frac{३}{४} - \frac{१}{२}\left(\frac{२}{३} - \frac{४+३}{२४}\right)\right.\right.$$

$$= \frac{११}{२} - \left[\frac{७}{३} \div \left\{\frac{३}{४} - \frac{१}{२}\left(\frac{२}{३} - \frac{७}{२४}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{११}{२} - \left[\frac{७}{३} \div \left\{\frac{३}{४} - \frac{१}{२}\left(\frac{१६-७}{२४}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{११}{२} - \left[\frac{७}{३} \div \left\{\frac{३}{४} - \frac{१}{२} \times \frac{९}{२४}\right\}\right]$$

$$= \frac{११}{२} - \left[\frac{७}{३} \div \left\{\frac{३}{४} - \frac{९}{४८}\right\}\right]$$

$$= \frac{११}{२} - \left[\frac{७}{३} \div \left\{\frac{३६-९}{४८}\right)\right\}\right]$$

$= \frac{११}{२} - \left[\frac{७}{३} \div \frac{२७}{४८}\right] = \frac{११}{२} - \left[\frac{७}{३} \times \frac{४८}{२७}\right]$

$= \frac{११}{२} - \frac{११२}{२७} = \frac{२९७ - २२४}{५४} = \frac{७३}{५४} = १\frac{१९}{५४}$ **उत्तर**

सूचना: —(१) वह कोष्ठक जिसके पहिले − चिन्ह हो, हटाया जा सकता है यदि उससे भीतर की प्रत्येक संख्या का चिह्न बदल दिया जाये अर्थात् + चिह्न − चिह्न में और − चिह्न + चिह्न में बदल दिया जाये।

(२) यदि किसी कोष्ठक के पहिले + चिह्न हो तो बिना किसी परिवर्तन के उसको पृथक किया जा सकता है।

सरल करो:—

(२) $८ - \left[२\frac{१}{२} + \left\{३\frac{१}{२} - \left(५\frac{१}{६} - \overline{२\frac{१}{२} + १\frac{१}{४}}\right)\right\}\right]$

(३) $६ - \left[४ - \frac{१}{८}\left\{७ - \left(३ \div \overline{२ - \frac{१}{२}}\right)\right\}\right]$

(४) $७\frac{१}{२} - \frac{१}{२}\left[३\frac{३}{४} \div \left\{\frac{५}{६} \text{ का } \frac{२}{३}\left(\frac{१}{३} - \overline{\frac{१}{४} - \frac{१}{६}}\right)\right\}\right]$

(५) $१ \div [१ + १ \div \{१ + १ \div (१ + १ \div २)\}]$ (उ० प्र० १९४८)

(६) $\dfrac{\frac{५}{७} \text{ का } १\frac{३}{८} - \frac{५}{८} \text{ का } \frac{५}{७}}{१ - \frac{१}{७}\left(\frac{५}{१२} + \frac{१}{३}\right)} \times \dfrac{\frac{१}{३} + \frac{१}{७} \div \left(\frac{१}{७} - \frac{१}{९}\right)}{\left(\frac{१}{३} + \frac{१}{७}\right) \div \frac{१}{७} - \frac{१}{९}}$

(७) $\dfrac{७}{५ - \frac{८}{३}} \div \dfrac{३ - \dfrac{२}{३ - \frac{३}{२}}}{४ - \frac{३}{२}} - \frac{५}{७} \text{ का } \left\{\dfrac{१}{१\frac{३}{७}} + \frac{६}{५} \text{ का } \dfrac{३\frac{१}{३} - २\frac{१}{२}}{४\frac{७}{२१} - २}\right\}$

(८) $\left\{\dfrac{२}{३ - \dfrac{१}{१ - \frac{१}{२}}} - \frac{१}{३} \text{ का}\left(५ - \dfrac{२}{\frac{३}{२} - \frac{१}{३}}\right)\right\} \div \dfrac{\frac{१}{२} + \frac{५}{४}}{१\frac{१}{२}}$

नम्बर २-(९) $\frac{२०}{६७}$ को संलग्न भिन्न में बदलो।

क्रियाः— $\frac{२०}{६७}=\frac{१}{\frac{६७}{२०}}=\frac{१}{३+\frac{७}{२०}}=\frac{१}{३+\frac{१}{\frac{२०}{७}}}=\frac{१}{३+\frac{१}{२+\frac{६}{७}}}$

$$=\frac{१}{३+\frac{१}{२+\frac{१}{\frac{७}{६}}}}=\frac{१}{३+\frac{१}{२+\frac{१}{१+\frac{१}{६}}}}$$

उत्तर

सूचना :—इसको हम निम्न भाँति भी लिख सकते हैं :—

$$\frac{१}{३+}\;\frac{१}{२+}\;\frac{१}{१+}\;\frac{१}{६}$$

निम्नलिखित को संलग्न भिन्न के रूप में लिखो :—

(१०) $\frac{२९}{७०}$ (११) $\frac{१९}{४३}$ (१२) $१\frac{२९}{५०}$

नम्बर ३—(१३) $३+\frac{१}{३+\frac{१}{३+\frac{१}{३}}}$ को सरल करो।

क्रिया :—ऐसे प्रश्नों में नीचे की ओर से सरल करना आरम्भ करके ऊपर को चलते हैं।

$$३+\frac{१}{३+\frac{१}{३+\frac{१}{३}}}=३+\frac{१}{३+\frac{१}{\frac{१०}{३}}}=३+\frac{१}{३+\frac{३}{१०}}$$

$$=३+\frac{१}{\frac{३३}{१०}}=३+\frac{१०}{३३}=\frac{१०}{३३}=३\frac{१०९}{३३}$$

उत्तर

सरल करो :—

(१४) $१ - \cfrac{२}{३ + \cfrac{४}{५ - \cfrac{६}{७}}}$ (१५) $\cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{२ + \cfrac{१}{३ + \cfrac{१}{४}}}}$

(१६) $\frac{१}{२+}\;\frac{२}{३+}\;\frac{३}{४+}\;\frac{५}{६}$

(१७) $\frac{५}{४+}\;\frac{३}{३+}\;\frac{२}{२+}\;\frac{१}{१+}\;\frac{१}{५}$

खंड ख—नम्बर ४—(१८) एक अंकगणित का प्रश्न इस प्रकार छप गया था "$\frac{४}{२१}$, $\frac{२१}{४}$, $\frac{\;}{२८}$ को जोड़ो।" इसमें एक भिन्न का अंश अकस्मात मिट गया था। परन्तु उसका उत्तर $५\frac{२३}{४२}$ दिया हुआ था, तो बताओ वह मिटा हुआ अंश क्या था।

क्रिया :— $\frac{४}{२१} + \frac{२१}{४} = \frac{१६ + ४४१}{८४} = \frac{४५७}{८४}$

∴ तीसरी भिन्न $= ५\frac{२३}{४२} - \frac{४५७}{८४} = \frac{२३३}{४२} - \frac{४५७}{८४}$

$= \frac{४६६ - ४५७}{८४} = \frac{९}{८४} = \frac{३}{२८}$

∴ मिटा हुआ अंश = ३ उत्तर

(१९) निम्नलिखित प्रश्न के मिटे हुए अंक बताओ :—

$१\frac{२}{३} = \frac{७}{१\;} + \frac{१४}{५१} + \frac{१}{\;३४} - \frac{१}{१०२}$

(२०) किसी अंकगणित में एक प्रश्न निम्न प्रकार छपा था :—

$\frac{\frac{१}{२} + \frac{१}{३}}{\frac{१}{२} - \frac{१}{३}} + \frac{\frac{३}{४} + \frac{३}{५}}{\frac{३}{४} - \frac{३}{५}} - \frac{\frac{५}{६} + \frac{५}{७}}{\frac{५}{६} \;\; \frac{५}{७}}$ इसमें पहिली भिन्न का हर अकस्मात् मिट गया और पुस्तक के अन्त में उसका उत्तर १ दिया हुआ था, तो मिटे हुए अंक को बताओ।

(२१) एक अंकगणित की पुस्तक में प्रश्न इस प्रकार छप गया था :—
$\frac{१}{५\frac{२}{३}}$, $\frac{१}{१३\frac{१}{३}}$, $\frac{१}{\quad}$, $\frac{१}{८\frac{४}{७}}$ को जोड़ो। इसमें एक भिन्न का हर अकस्मात् मिट गया और उत्तर $\frac{२}{३}$ दिया हुआ था। तो मिटा हुआ हर बताओ।

नम्बर ५—(२२) निम्न प्रश्न में अनुपस्थित अंकों की पूर्ति करोः—

$$६\frac{३}{❀} \times ❀\frac{२}{३} = १७$$

क्रियाः—

∵ (६ + कोई भिन्न) १७ में (२ + कोई भिन्न) बार शामिल है, इस कारण द्वितीय मिश्र भिन्न का पूर्णाङ्क २ होना चाहिए।

$$\therefore ६\frac{३}{❀} \times २\frac{२}{३} = १७$$

$$\therefore ६\frac{३}{❀} = १७ \div २\frac{२}{३} = १७ \times \frac{३}{८} = \frac{५१}{८} = ६\frac{३}{८}$$

∴ मिटे हुए अंक क्रमशः ८ और २ हैं। उत्तर

निम्न प्रश्न में मिटे हुए अंकों की पूर्ति करोः—

(२३) $७\frac{❀}{११} \times ५\frac{१}{❀} = ३६$

(२४) $\frac{३}{८} \times \frac{१}{❀९} = \frac{❀}{१२}$

नम्बर ६-(२५) यदि १५ पौं० के $\frac{५}{९}$ के $\frac{१}{१२}$ में से एक गिनी का $\frac{७}{१५}$ निकाल लिया जाय, तो बताओ कि शेषफल ३ पौं० ९ शि० की कौन सी भिन्न होगी ?

क्रियाः—१ गिनी का $\frac{७}{१५}$ = २१ शि० का $\frac{७}{१५} = \frac{४९}{५}$ शि०

फिर १५ पौं० के $\frac{१}{१२}$ का $\frac{५}{९} = \frac{१}{१२}$ का $\frac{५}{९}$ का १५ × २० शि०।

$= \frac{१२५}{९}$ शि०

$$\therefore \frac{१२५}{९} \text{ शि०} - \frac{४९}{५} \text{ शि०} = \frac{६२५ - ४४१}{४५} \text{ शि०}$$

और ३ पौं० ९ शि० = ६९ शि०

∴ अभीष्ट भिन्न $= \frac{१८४}{४५} \div ६९$

$$= \frac{१८४}{४५ \times ६९} = \frac{८}{१३५}$$ उत्तर

नियम :—दोनों राशियों को एक सी ही राशि में परिवर्तन करो और पहिली को दूसरी से भाग दो।

सूचना :—उक्त प्रश्न निम्न किसी प्रकार से भी पूछा जा सकता है :—

(अ) $\frac{१८४}{४८५}$ शि०, ३ पौं० ६ शि० का कौन-सा भाग है ?

(ब) $\frac{१८४}{४८५}$ शि० को ३ पौं० ६ शि० की भिन्न में परिवर्तित करो।

(स) $\frac{१८४}{४८५}$ शि० को ३ पौं० ६ शि० की भिन्न के रूप में लाओ।

(द) $\frac{१८४}{४८५}$ शि०, ३ पौं० ६ शि० में कितनी बार सम्मिलित है ?

(क) यदि $\frac{१८४}{४८५}$ शि० को ३ पौं० ६ शि० से भाग दें, तो क्या भागफल प्राप्त होगा ?

(२६) १६$\frac{१}{२}$ गज के $\frac{३}{५}$ के ७$\frac{१}{२}$ का $\frac{३}{५}$, एक फर्लाङ्ग की कौन सी भिन्न है ?

(२७) जब रुपये का मूल्य १ शि० ४$\frac{१}{२}$ पैं० हो तो ६६ पौं० १४ शि० ५$\frac{१}{८}$ पैं० को १,००० रु० की दशमलव भिन्न में बदलो।

(२८) ३ गिनी के $\frac{\text{१ रु० ६ आ०}}{\text{६ रु० ४ आ०}}$ का मान बताओ और उसको ५ पौं० की भिन्न में बदलो।

(२९) तुम कौन-सा धन लेना पसन्द करोगे :—

१००० पौं० का $\frac{१}{१३२८}$ या १ पौं० का $\frac{३}{४}$?

(३०) नीचे दिये हुए प्रश्नों में बिना हल किये यह बतलाओ कि कौन से शुद्ध हैं और कौन से अशुद्ध और उनके कारण भी बताओ :—

(अ) $२३\frac{२}{७} \times \frac{८}{९} = २४\frac{९}{६३}$ (ब) $१२\frac{९}{१०} \times ३\frac{१}{२} = ३२\frac{१}{१०}$

(स) $१४\frac{२}{३} \times \frac{१}{४} = ५८\frac{२}{३}$ (द) $६\frac{४}{५} \times \frac{३}{२} = १०\frac{१}{५}$

(य) $१५\frac{४}{५} \times ४\frac{१}{२} = ५५\frac{३}{१०}$ (र) $१२\frac{५}{६} \times \frac{१८}{१९} = १२\frac{३}{१९}$

भिन्नों में बीजगणित के सूत्रों का प्रयोग

खंड ग—नम्बर ७—(३१) सरल करो :—

$$\frac{३२ \times ३२ + २ \times ३२ \times ३५ + ३५ \times ३५}{३२ + ३५}$$

सूचना :—उक्त प्रश्न में अ^२ + २अ ब + ब^२ = (अ + ब)^२ सूत्र का प्रयोग करो।

क्रिया :—दिया हुआ प्रश्न

$$= \frac{(३२)^२ + २ (३२ \times ३५) + (३५)^२}{३२ + ३५}$$

$$= \frac{(३२ + ३५)^२}{(३२ + ३५)} = (३२ + ३५) = ६७$$ उत्तर

निम्नलिखित को सरल करो :—

(३२) $\frac{३ \times ३ + २ \times ३ \times ५ + ५ \times ५}{३ + ५}$

(३३) $\frac{१७१ \times १७१ - २ \times १७१ \times १४६ + १४६ \times १४६}{१७१ - १४६}$

सूचना :—उक्त प्रश्न में $अ^२ - २ अ ब + ब^२ = (अ - ब)^२$ सूत्र का प्रयोग करो।

नम्बर ८-(३४) सरल करो :— $\frac{५७ \times ५७ - ३६ \times ३६}{५७ + ३६}$

सूचना:—उक्त प्रश्न में $अ^२ - ब^२ = (अ + ब)\ (अ - ब)$ सूत्र का प्रयोग करो।

क्रिया :—दिया हुआ पद $= \frac{(५७)^२ - (३६)^२}{५७ + ३६}$

$$= \frac{(५७ + ३६)\ (५७ - ३६)}{५७ + ३६}$$

$$= (५७ - ३६) = २१$$ उत्तर

निम्नलिखित को सरल करो :—

(३५) $\frac{११६ \times ११६ - १०० \times १००}{११६ - १००}$

(३६) $\frac{७३६ \times ७३६ - २६४ \times २६४}{७३६ - २६४}$

नम्बर ९–(३७) सरल करो :—$\dfrac{७ \times ७ \times ७ + ४ \times ४ \times ४}{७ + ४}$

सूचना :—उक्त प्रश्न में $अ^3 + ब^3 = (अ + ब)\,(अ^२ - अ\,ब + ब^२)$ सूत्र का प्रयोग करो।

क्रिया :—दिया हुआ पद

$$= \frac{(७)^3 + (४)^3}{७ + ४} = \frac{(७ + ४)\,\{(७)^२ - (७ \times ४) + (४)^२\}}{७ + ४}$$

$$= (७)^२ - (७ + ४) + (४)^२ = ४९ - २८ + १६ = ३७$$ उत्तर

निम्नलिखित को सरल करो :—

(३८) $\dfrac{(८९)^3 + (६४)^3}{(८९)^२ - ५६९६ + (६४)^२}$

संकेत :—$८९ \times ६४ = ५६९६$

नम्बर १०—(३९) सरल करो :—

$$\frac{\frac{१}{८} \times \frac{१}{८} \times \frac{१}{८} + \frac{१}{७} \times \frac{१}{७} \times \frac{१}{७} + ३ \times \frac{१}{६४} \times \frac{१}{७} + ३ \times \frac{१}{८} \times \frac{१}{४९}}{\frac{१}{८} \times \frac{१}{८} + २ \times \frac{१}{८} \times \frac{१}{७} + \frac{१}{७} \times \frac{१}{७}}$$

सूचना :—उक्त प्रश्न में $(अ + ब)^3 = अ^3 + ब^3 + ३अ^२ब + ३\,अ\,ब^२$ सूत्र का प्रयोग करो।

क्रिया :—दिया हुआ पद $= \dfrac{(\frac{१}{८} + \frac{१}{७})^3}{(\frac{१}{८} + \frac{१}{७})^२} = \frac{१}{८} + \frac{१}{७} = \frac{१५}{५६}$ उत्तर

(४०) निम्नांकित को सरल करो :—

$$\frac{\frac{१}{५} \times \frac{१}{५} \times \frac{१}{५} + \frac{१}{४} \times \frac{१}{४} \times \frac{१}{४} + \frac{३}{१००} + \frac{३}{८०}}{(\frac{१}{५})^२ + २ \times \frac{१}{५} \times \frac{१}{४} + (\frac{१}{४})^२}$$

नम्बर ११—(४१) सरल करो :—

$$\frac{\text{६}\times\text{६}\times\text{६}\times\text{६}+\text{६}\times\text{६}\times\text{७}\times\text{७}+\text{७}\times\text{७}\times\text{७}\times\text{७}}{\text{६}\times\text{६}+\text{६}\times\text{७}+\text{७}\times\text{७}}$$

सूचना :—उक्त प्रश्न में $\text{अ}^{\text{४}}+\text{अ}^{\text{२}}\text{ब}^{\text{२}}+\text{ब}^{\text{४}}=(\text{अ}^{\text{२}}+\text{अ ब}+\text{ब}^{\text{२}})$ $(\text{अ}^{\text{२}}-\text{अ ब}+\text{ब}^{\text{२}})$ सूत्र का प्रयोग करो ।

क्रिया :—दिया हुआ पद $=\dfrac{(\text{६})^{\text{४}}+(\text{६})^{\text{२}}\times(\text{७})^{\text{२}}+(\text{७})^{\text{४}}}{(\text{६})^{\text{२}}+(\text{६}\times\text{७})+(\text{७})^{\text{२}}}$

$$=\frac{\{(\text{६})^{\text{२}}+(\text{६}\times\text{७})+(\text{७})^{\text{२}}\}\quad\{(\text{६})^{\text{२}}-(\text{६}\times\text{७})+(\text{७})^{\text{२}}\}}{(\text{६})^{\text{२}}+(\text{६}\times\text{७})+(\text{७})^{\text{२}}}$$

$=(\text{६})^{\text{२}}-(\text{६}\times\text{७})+(\text{७})^{\text{२}}=\text{८१}-\text{४२}+\text{४९}=\text{६७}$ उत्तर

निम्नलिखित को सरल करो :—

(४२) $\dfrac{\text{१२}^{\text{४}}+\text{१२}^{\text{२}}\times\text{१०}^{\text{२}}+\text{१०}^{\text{४}}}{\text{१२}\times\text{१२}-\text{१२}\times\text{१०}+\text{१०}\times\text{१०}}$

(४३) $\dfrac{(\frac{\text{३}}{\text{५}})^{\text{४}}+(\frac{\text{५}}{\text{३}})^{\text{४}}+\text{१}}{(\frac{\text{३}}{\text{५}})^{\text{२}}+(\frac{\text{५}}{\text{३}})^{\text{२}}-\text{१}}$

संकेत :—$\text{१}=(\frac{\text{३}}{\text{५}}\times\frac{\text{३}}{\text{५}})\times(\frac{\text{५}}{\text{३}}\times\frac{\text{५}}{\text{३}})$

नम्बर १२—(४४) सरल करो :—

$$\frac{\text{१}}{(\frac{\text{७}}{\text{८}}-\frac{\text{५}}{\text{९}})(\frac{\text{३}}{\text{४}}-\frac{\text{५}}{\text{९}})}+\frac{\text{१}}{(\frac{\text{५}}{\text{९}}-\frac{\text{३}}{\text{४}})(\frac{\text{७}}{\text{८}}-\frac{\text{३}}{\text{४}})}+\frac{\text{१}}{(\frac{\text{३}}{\text{४}}-\frac{\text{७}}{\text{८}})(\frac{\text{५}}{\text{९}}-\frac{\text{७}}{\text{८}})}$$

सूचना :—

$$\frac{\text{१}}{(\text{अ}-\text{ब})\ (\text{स}-\text{ब})}+\frac{\text{१}}{(\text{ब}-\text{स})\ (\text{अ}-\text{स})}+\frac{\text{१}}{(\text{स}-\text{अ})\ (\text{ब}-\text{अ})}=\text{०}$$

संकेत :—यदि उक्त प्रश्न में $\text{अ}=\frac{\text{७}}{\text{८}}$, $\text{ब}=\frac{\text{५}}{\text{९}}$ और $\text{स}=\frac{\text{३}}{\text{४}}$ के माना जाय तो दिया हुआ पद

$$=\frac{\text{१}}{(\text{अ}-\text{ब})\ (\text{स}-\text{ब})}+\frac{\text{१}}{(\text{ब}-\text{स})\ (\text{अ}-\text{स})}+\frac{\text{१}}{(\text{स}-\text{अ})\ (\text{ब}-\text{अ})}=\text{०}$$

उत्तर

(४५) सरल करो :—

$$\frac{१}{\left(\frac{६}{७}-\frac{९}{११}\right)\left(\frac{१३}{१५}-\frac{९}{११}\right)}+\frac{१}{\left(\frac{९}{११}-\frac{१३}{१५}\right)\left(\frac{६}{७}-\frac{१३}{१५}\right)}+\frac{१}{\left(\frac{१३}{१५}-\frac{६}{७}\right)\left(\frac{९}{११}-\frac{६}{७}\right)}$$

(४६) मान बताओ—

$$६४ \times १३५ - ३६ \times ६४ + ६ \times ३२$$

(उ० प्र०, १६४३)

(४७) १०० पौं० के $\left\{\frac{१}{३} \text{ का } \frac{१}{७} + \frac{१}{१३}\right\}$ का निकटतम पेंस तक मूल्य बताओ।

(उ० प्र०, १६४४)

(४८) निम्न में न्यूनतम तथा उच्चतम राशि बताओ :—

(i) $\frac{२}{५}$, $\frac{१३}{१००}$, $\frac{५}{१६}$, $\frac{७}{२५}$

सरल करो :—

(ii) $५\frac{१}{२} - \left[३ - \frac{१}{८} \left\{७\frac{१}{३} \left(\frac{३}{४} \text{ का } \frac{८}{९}\right)\right\}\right]$

(उ० प्र०, १६४७)

(४६) $\dfrac{४\frac{१}{४} - ३\frac{३}{४}}{७\frac{१}{२} - ४\frac{१}{४}} \div \dfrac{३\frac{१}{४} \text{ का } ५\frac{१}{२}}{५\frac{१}{२} - ३\frac{१}{४}}$ (उ० प्र०, १६४६)

(५०) एक चुनाव में कुल वोटरों के $\frac{७}{८}$ ने वोट दिये। क को ख से सवाये वोट मिले और वह ३५० वोटों से जीत गया। वोटों की कुल संख्या ज्ञात करो।

(उ० प्र०, १६४६)

छठा अध्याय

दशमलव भिन्न

प्रश्नावली ६

खण्ड क–नम्बर १–नीचे दिये हुए जोड़ के प्रश्नों में फूलांकित रिक्त स्थानों को ज्ञात करो :—

(१)
```
  २·५१४
  ३·❀
  ६·६❀०४
 १❀·६३❀❀
---------
 ३५·४७५८
---------
```

(२)
```
  ४·६६
  ३·२७❀८
  ❀·७
  ३·५४२❀६
  ४·❀
-----------
 १८·१७४६६
-----------
```

(३) निम्न प्रश्न में पड़े और खड़े खाने जोड़े गये हैं और इन सब का जोड़ दक्षिण ओर के सबसे नीचे वाले खाने में दिया है। रिक्त खानों को भरो :—

	१·२४		३·७८		
		८·५२			
	३·६६		२·५५	८·०६	
जोड़	६·७२	११·११		२५	कुल जोड़

निम्नलिखित घटाने के प्रश्नों में फूलांकित स्थानों को भरो :—

(४) २ ३ ˙ ❀ ० ❀   (५) ८ ˙ ३ ❀ १ ६
  २ ❀ ˙ ६ ❀ ७ ❀ ६   ❀ ˙ ० २ ४ ❀
  ˙ ० ५ ४ ४ ४   ३ ˙ ❀ ८ ❀ २

नम्बर २–(६) ˙३७ को ऋण पूर्णाङ्क और दशमलव में लिखो।

क्रिया :—˙३७ = १ − ˙६३ = − १ + ˙६३ — उत्तर

नीचे दी हुई दशमलव भिन्नों को (१) ऋण पूर्णाङ्क और (२) दशमलव भिन्नों में लिखोः—

(७) ˙२४   (८) २˙५८ − ३˙२६

(६) ३ (−२ + ˙४६) (१०) (−२ + ˙५८) ÷ २

नम्बर ३—संक्षेप करोः—

(११) (२०˙३४ × ३) + (३४˙२ × ३३)

(१२) (१६˙२५ × १७) − (११˙१७४ × १८)

(१३) (२˙४३७५ × १६) − (˙५६२५ × १६) + (५˙८४ × २५)

खण्ड ख—नम्बर ४–(१४) ˙००६५ × ३˙३२ = ६५ × (❀) के पुष्पांकित स्थान को बिना क्रिया किये ज्ञात करो।

क्रिया :– ˙००६५ को १०००० से गुणा करने पर ६५ प्राप्त होता है।

∴ ३˙३२ को १०००० से भाग देना चाहिये जिससे कि ˙००६५ × ३˙३२ के मान में कोई परिवर्तन न हो।

किन्तु ३˙३२ ÷ १०००० = ˙०००३३२

∴ पुष्पांकित स्थान की संख्या = ˙०००३३२ — उत्तर

निम्नलिखित प्रश्नों में पुष्पांकित स्थानों को भरोः—

(१५) १२३४ × ˙००२६ = १२˙३४ × (❀)

(१६) ७६३˙४६ × (❀) = ३००३ × ˙०७६३४६

(१७) (❀) × ˙०२ = २ × ˙०००००५

(१८) ३६˙००५ × १७˙६५४ = ❀ १˙७६५४

निम्नलिखित प्रश्नों में पुष्पांकित स्थानों को भरो :—

(१६) १२३˙४ ÷ ४˙६५ = १˙२३४ ÷ (❀)

(२०) ३६५˙३२ ÷ २६५˙२ = (❀) ÷ २˙६५२

(२१) २५३४˙२०४ ÷ (❀) = २˙५३४२०४ ÷ ˙४४४

(२२) (❀) ÷ २२˙७६ = ˙००११६३७५ ÷ ˙२२७६

नम्बर ५—छोटी से छोटा सरल भिन्न में बदलो :—

(२३) ·००१५ (२४) २·०६५ (२५) ३६०·०८६

निम्नलिखित सरल भिन्नों को दशमलव भिन्न में बदलो :—

(२६) $\frac{३५}{१०००}$ (२७) $\frac{१६६}{१००००}$ (२८) $३\frac{२५}{१००}$ (२६) $५\frac{३}{४}$

नम्बर ६—निम्नलिखित का म० स० और ल० स० प० ज्ञात करो :—

(३०) ·४, ·६ (३१) ·३, ·१२

(३२) २५·१२४, ·३४६८ (३३) ·००२५२, ·०००१५६

(३४) १·७२५, २६·५५, ६·१६५, ·०६५५

खंड ग नम्बर ७—संक्षेप करो :-

(३५) $\frac{·१२ \text{ का } (·०१०४ - ·००२) + ·३६ \times ·००२}{·१२ \times ·१२}$

(३६) $\frac{(७·२५ + २·०६५) \times \frac{२}{९}}{\frac{७}{८} + \frac{२}{३} + (·६ \div १\frac{८}{७})}$

(३७) (३·६ का ·२५ ÷ १·१) × (·४४ × ·६ − ·५)

(३८) $\frac{(३·२)^२ \times २·३ - ३·२ \times (२·३)^२}{७·३६}$

(३६) $\frac{·१ \times ·१ \times ·१ + ·०१ \times ·०१ \times ·०१}{·२ \times ·२ \times ·२ + ·०२ \times ·०२ \times ·०२}$

(४०) $\frac{·३ \times ·३ \times ·३ - ·०३ \times ·०३ \times ·०३}{·६ \times ·६ \times ·६ - ·०६ \times ·०६ \times ·०६}$

विविध :—(४१) १३४·२६७१८ को ४७२३६२ से दशमलव के तीसरे स्थान तक विभाजित करो। (उ० प्र० १९४१)

(४२) मान बताओ :—

$\frac{(३·३७)^२ - (०·६३)^२}{(१·०६८५)^२ - (०·६३१५)^२}$ (उ० प्र०, १९४३)

(४३) सरल करो :—

$\frac{०·१५ \times १·६ + ०·८}{०·२५ \times ०·४}$ (उ० प्र०, १९४७)

सातवाँ अध्याय

वर्गमूल

१. किसी दी हुई संख्या के दो समान खंडों का गुणनफल उस संख्या का वर्ग कहलाता है।

जैसे २ का वर्ग = २ × २ = ४ ;

और ७ का वर्ग = ७ × ७ = ४९, इत्यादि।

किसी संख्या का वर्ग साधारणतः उस संख्या के ऊपर कुछ थोड़ा सा दक्षिण की ओर को २ का अंक रखकर प्रकट किया जाता है।

जैसे $६^{२}$ (यह ६ के वर्ग को प्रकट करता है) अर्थात् $६^{२}$ = ६ × ६

२. कोई संख्या अपने वर्ग का वर्गमूल कहलाती है।

जैसे, ५ वर्गमूल २५ का है। यथा ९ वर्गमूल ८१ का है। बहुधा किसी संख्या का वर्गमूल उसके पूर्व √ चिन्ह को रखकर प्रकट किया जाता है, या उस संख्या के दक्षिण की ओर ऊपर $\frac{१}{२}$ भिन्न रखकर भी ऐसा करते हैं।

जैसे $\sqrt{६४}$ या $(६४)^{\frac{१}{२}}$ ये दोनों ही ६४ का वर्गमूल प्रकट करते हैं।

इस कारण √ ६४ या $(६४)^{\frac{१}{२}}$ = ८

३. उस संख्या को जिसका वर्गमूल पूर्णाङ्क या भिन्न राशि में प्रकट किया जा सके पूर्ण वर्ग कहते हैं।

जैसे ३६ और १४४ पूर्ण वर्ग हैं और उनके वर्गमूल क्रमशः ६ और १२ हैं तथा $\frac{८१}{१६९}$ भी पूर्ण वर्ग है जिसका वर्गमूल $\frac{९}{१३}$ है।

४. निम्नांकित पाटी अधिक उपयोगी है और इसको कण्ठस्थ कर लेना चाहिये:—

संख्या	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३
वर्ग	१	४	९	१६	२५	३६	४९	६४	८१	१००	१२१	१४४	१६९
घन	१	८	२७	६४	१२५	२१६	३४३	५१२	७२९	१०००	१३३१	१७२८	२१९७

उक्त पाटी को ध्यानपूर्वक देखने से प्रतीत होता है कि

(अ) वर्ग की संख्या के अन्त में २, ३, ७ व ८ कभी नहीं आते।

(ब) घन की संख्या के अन्त में कोई भी अंक आ सकता है।

(स) एक अंक की संख्या के वर्ग में एक या दो अंक होते हैं, दो अंक की संख्या के वर्ग में ३ या ४ अंक होते हैं तथा तीन अंक की संख्या के वर्ग में ५ या ६ अंक होते हैं। इत्यादि.....

इसलिये हम देखते हैं कि यदि किसी संख्या के अंकों को दक्षिण ओर से दो-दो के समूह में विभाजित कर दिया जाये, तो उस संख्या के वर्गमूल के अंक बड़ी सुगमता से ज्ञात किये जा सकते हैं। वर्गमूल में सर्वदा प्रत्येक दो अंकों के समूह के लिये एक अंक आता है, तथा जब कभी दी हुई संख्या के अंकों की गिनती विषम संख्या हो तो अन्त के समूह में दो अंकों के स्थान पर एक ही अंक रहता है।

जैसे १२२५ के वर्गमूल में २ अंक आयेंगे; ११९०२५ के वर्गमूल में ३ अंक आयेंगे, इत्यादि।

दशमलव भिन्नों में—

·१ × ·१ = ·०१ ∴ √·०१ = ·१

·०२ × ·०२ = ·०००४ ∴ √·०००४ = ·०२

·००३ × ·००३ = ·००-००९ ∴ √·००००९ = ·००३

इसलिए हम देखते हैं कि

यदि किसी संख्या में दशमलव के दो स्थान हैं, तो उसके वर्गमूल में दशमलव का एक स्थान होता है।

यदि किसी संख्या में दशमलव के चार स्थान हैं, तो उसके वर्गमूल में दशमलव के दो स्थान होते हैं।

इसी प्रकार यदि किसी संख्या में दशमलव के ६ स्थान हैं तो उसके वर्गमूल में दशमलव के तीन स्थान होंगे।

इसलिये दशमलव का वर्गमूल निकालने में पूर्णांक भाग में तो हम दक्षिण ओर से बाईं ओर को ही दो-दो के समूह बनाते चलते हैं, और दशमलव भाग में दशमलव बिन्दु के बाद दूसरे अंक से आरम्भ करके बाईं ओर से

दक्षिण की ओर को दो-दो के समूह बनाते चलते हैं, फिर प्रत्येक समूह के लिये वर्गमूल में एक-एक अंक आयेगा।

जैसे, ·०००२८९ के वर्गमूल में दशमलव के तीन स्थान हैं।

नीचे दिये हुए वर्गमूलों का स्मरण रखना विद्यार्थियों के लिये हितकर होगा :—

√२	= १·४१४२१३	= १·४१४	दशमलव के ३ स्थान तक शुद्ध
√३	= १·७३२०५०	= १·७३२	....
√५	= २·२३६०६८	= २·२३६	....
√६	= २·४४९४९०	= २·४४९	....
√७	= २·६४५७५१	= २·६४६	....
√८	= २·८२८४२७	= २·८२८	....
√१०	= ३·१६२२७८	= ३·१६२	....

प्रश्नावली ७

खंड क—नम्बर १-(१) १४४४ के खंड करके वर्गमूल निकालो।

नियम—(अ) दी हुई संख्या के अभाज्य खंड करो।

(ब) उसमें जो अभाज्य खंड प्राप्त हों उनको उनके घात के गुणनफल के रूप में लिखो।

(स) तब वर्गमूल के लिए प्रत्येक उपक्रमणिका को दो से, घनमूल के लिए तीन से और चार घात मूल के लिये चार से भाग दो।

(द) इस प्रकार जो अभाज्य खंडों के घात का गुणनफल प्राप्त होगा वही उसका वर्गमूल, घनमूल या चार घातमूल होगा।

क्रिया :—

२	१४४४
२	७२२
१९	३६१
	१९

∴ १४४४ = २ × २ × १९ × १९
= २² × १९²

∴ √१४४४ = २ × १९
= ३८ उत्तर

खंड करके वर्गमूल निकालो :—

(२) ४४१ (३) ६५६१ (४) १७३०५६

(५) १६५ × ७७ × ७५ × ३५

निम्न का खंडों द्वारा घनमूल ज्ञात करो :—

(६) १२५६७१२ (७) ८६६८६१२

निम्नलिखित का खंडों द्वारा चार घातमूल ज्ञात करो :—

(८) १३०३२१ (६) ८८५२६२८१

नम्बर २–(१०) ८२४४६४ का वर्गमूल निकालो।

साधारण-नियम :—(अ) संख्या को दो-दो अंकों के समूह में विभाजित करो, इकाई की ओर से आरम्भ करके बाईं ओर को, और यदि दशमलव हो तो दशमलव बिन्दु के बाद दक्षिण ओर को प्रत्येक दूसरे अंक के ऊपर एक विन्दु रखो।

(ब) बड़ी से बड़ी संख्या जिसका वर्ग पहले पृथक् समूह में सम्मिलित है ज्ञात करो। यह अभीष्ट वर्गमूल का पहिला अंक होगा, इसके वर्ग को पहले समूह में से घटाओ, और जो शेष रहे, उसके पास दूसरा समूह उतारो।

(स) अब इस शेष को अन्त की संख्या न लेते हुए, वर्गमूल के इस भाग के दुगुने से भाग दो और जो प्राप्त हो, उसको वर्गमूल का दूसरा अंक रखो, और साथ ही उसको उस नये भाजक का भी अंक मानो। तब इस नये भाजक को वर्गमूल के इस प्राप्त भाग से (अर्थात् दूसरे अंक से) गुणा करो और इस गुणनफल को ऊपर के शेष में से घटाओ।

यदि दूसरा अंक अधिक है, जैसा कि कभी-कभी हो जाता है, तो उससे छोटा अंक लो।

(द) यदि और अधिक समूह उतारने पड़ें, तो उक्त रीति का ही अनुसरण करना चाहिये।

(य) दशमलव के बाद वाले अंकों की संख्या को सम बनाने के लिये ० बढ़ा लो।

सूचना :—दशमलव की दशा में, दशमलव बिन्दु वर्गमूल में ठीक दशमलव बिन्दु के ऊपर रखा जाना चाहिये।

क्रियाः—

	९ ० ८
९	८ २ ४ ४ ६ ४
	८ १
	१ ४ ४ ६ ४
१८०८	१ ४ ४ ६ ४
	×

∴ अभीष्ट वर्गमूल = ९०८ उत्तर

वर्गमूल निकालो :—

(११) ११६६४ (१२) ५३१४४१ (१३) २२६८०३६

(१४) ४१००६२५ (१५) ४२०२९१००१ (१६) ३४५९६००००००

नम्बर ३—(१७) २८·८३६९ का वर्गमूल ज्ञात करो।

क्रिया—

	५· ३ ७
५	२८ ·८३ ६९
	२५
१०३	३८३
	३०९
१०६७	७४६९
	७४६९
	×

∴ अभीष्ट वर्गमूल = ५·३७ उत्तर

वर्गमूल ज्ञात करो :—

(१८) १५१·२९ (१९) १०५६·२५ (२०) ·०२१९०४

(२१) ·००२०३४०१ (२२) १·००२००१ (२३) ४९३८१·७२८४

वर्गमूल ज्ञात करो :—

(२४) १·६ का दो दशमलव स्थान तक।

(२५) ·२२५ का ३ " "

(२६) ३ का ४ " "

संकेत :—प्रश्न २४ से २६ तक में जितने दशमलव स्थान तक उत्तर पूछा गया है उससे दुगुने स्थान तक यदि आवश्यकता हो तो शून्य लगाकर इन संख्याओं में दशमलव स्थान पूर्ण कर लेने चाहिए।

खंड ख—नम्बर ४—(२७) $\frac{४९}{१२१}$ का वर्गमूल निकालो :—

नियम :—यदि किसी भिन्न के अंश और हर पूर्ण वर्ग हैं तो उसका वर्गमूल भी वह भिन्न होगी, जिसमें उसके अंश के स्थान पर उसके अंश का वर्गमूल और हर के स्थान पर हर का वर्गमूल होगा।

क्रिया:—$\sqrt{\frac{४९}{१२१}} = \sqrt{\frac{७^२}{११^२}} = \frac{७}{११}$ उत्तर

निम्नांकित का वर्गमूल ज्ञात करो :—

(२८) $\frac{१६९}{२८९}$ (२९) $\frac{६२५}{९६१}$ (३०) $\frac{२\cdot२५}{२\cdot५६}$

नम्बर ५—(३१) $१२\frac{२४}{२५}$ का वर्गमूल ज्ञात करो।

क्रिया:—$१२\frac{२४}{२५} = \frac{३२४}{२५}$

$$\therefore \sqrt{१२\frac{२४}{२५}} = \sqrt{\frac{३२४}{२५}} = \sqrt{\frac{१८^२}{५^२}} = \frac{१८}{५} = ३\frac{३}{५}$$ उत्तर

वर्गमूल ज्ञात करो:—

(३२) $२०\frac{१}{४}$ (३३) $१०१\frac{१}{४००}$ (३४) $४३\frac{१४}{२५}$ (३५) $६\frac{७८२२}{१५१२१}$

नम्बर—६ (३६) $\frac{१९८}{२५६}$ का वर्गमूल ज्ञात करो।

क्रिया:—$\frac{१९८}{२५६}$ का अंश १९८ पूर्ण वर्ग नहीं है, इसलिये पहले १९८ का वर्गमूल निकालना चाहिये।

$\sqrt{१९८} = १४\cdot०७१$ दशमलव के तीन स्थान तक।

$$\therefore \sqrt{\frac{१९८}{२५६}} = \frac{\sqrt{१९८}}{\sqrt{२५६}} = \frac{\sqrt{१९८}}{\sqrt{१६ \times १६}} = \frac{१४\cdot०७१}{१६} = \cdot८७९.....$$

उत्तर

निम्नलिखित का वर्गमूल ज्ञात करो :—

(३७) $\frac{२४}{२५}$ (३८) $\frac{३१}{७१}$ (३९) $\frac{१०१}{४४१}$

नम्बर ७—(४०) $\frac{५}{८}$ का वर्गमूल ज्ञात करो।

क्रिया:—जिस भिन्न में अंश और हर में से कोई भी पूर्ण वर्ग न हो वहाँ हर और अंश को ऐसी संख्या से गुणा करो कि हर पूर्ण वर्ग बन जाये।

$$\frac{५}{८} = \frac{५ \times २}{८ \times २} = \frac{१०}{१६}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{५}{८}} = \sqrt{\frac{१०}{१६}} = \frac{\sqrt{१०}}{४} = \frac{३\cdot१६२२७८}{४}$$

= ·७६०६ (दशमलव के ४ स्थान तक) उत्तर

निम्नांकित का वर्गमूल क्या है :—

(४१) $\frac{७}{८}$ (४२) $\frac{१६}{७५}$ (४३) $१५\frac{१}{६}$ (४४) $\frac{२१}{५२}$ (४२) $\frac{५\cdot०४}{\cdot०२१}$

नम्बर ८—(४६) निम्नलिखित प्रश्न के पुष्पांकित स्थान को भरो :—

$\sqrt{९८०१}$ = ९❀

क्रिया :— $\sqrt{९८०१}$ = ९९

∴ पुष्पांकित स्थान वाला अंक = ९ उत्तर

निम्नलिखित वर्गमूल के प्रश्नों में कुछ अंकों को फूल (❀) के प्रकट किया गया है। उनको ज्ञात करो:—

(४७) $\sqrt{११८८१}$ = १❀९

(४८) $\sqrt{५❀९०❀}$ = २३०

(४९) $\sqrt{\cdot००१६८१}$ = ·❀४१

(५०) $\sqrt{\frac{६४०९}{२४९६४}} = \frac{❀७}{१❀८}$

(५१) $\sqrt{❀\frac{९८}{५२९}} = १\frac{११}{१२३}$

(५२) $\sqrt{८७\frac{४४२}{१६८१}} = ९\frac{१४}{४१}$

खंड ग—नम्बर ९—(५३) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात करो जिसे ५६५० में जोड़ देने से योगफल एक पूर्ण वर्ग बन जाय।

क्रिया :—

```
        | ७ ५
      ७ | ५६५०
        | ४९
        | ७५०
   १४५  | ७२५
        |  २५
```

इस क्रिया से हमको यह प्रतीत होता है कि ७५ वह बड़ी से बड़ी संख्या है जिसका वर्ग ५६५० में सम्मिलित है।

७६ का वर्ग = ७६^{२} = ७६ × ७६ = ५७७६

किन्तु यह ५६५० से ५७७६ — ५६५० अथवा १२६ अधिक है।

इस कारण वह छोटी से छोटी संख्या जिसे ५६५० में जोड़ देने से योगफल एक पूर्ण वर्ग बन जाये = १२६ उत्तर

(५४) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात करो जिसको २३४५ में जोड़ने से योगफल एक पूर्ण वर्ग बन जाये।

(५५) वह छोटी से छोटी कौन-सी संख्या है जिसको यदि ५६०५० में जोड़ा जाये तो योगफल एक पूर्ण वर्ग बन सके ?

नम्बर १०—(५६) वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जिसको ४१२४ में से घटाने पर एक पूर्ण वर्ग बन सके।

क्रिया : —

```
        | ६ ४
      ६ | ४१२४
        | ३६
   १२४  | ५२४
        | ४९६
        |  २८
```

४१२४ में ६४ का वर्गमूल सम्मिलित होने से २८ और अधिक है।

∴ अभीष्ट छोटी से छोटी संख्या जिसे ४१२४ में से घटाने पर शेष एक पूर्ण वर्ग बन सके = २८ उत्तर

(५७) ६७०० में से कौन-सी छोटी से छोटी संख्या घटा देने पर एक पूर्ण वर्ग रह जायेगा ?

(५८) ७०७६ में से कौन-सी छोटी से छोटी संख्या घटाई जाये कि शेष एक पूर्ण वर्ग रह जाये ?

नम्बर ११—(५९) २४० को किस संख्या से गुणा किया जाय कि गुणनफल एक पूर्ण वर्ग हो सके ?

क्रियाः—२४० = २ × २ × २ × २ × ३ × ५ = $२^२ × २^२$ × ३ × ५

किन्तु पूर्ण वर्ग वह संख्या है जो दो समान खंडों में विभाजित हो सके।

∴ २४० को एक पूर्ण वर्ग बनाने के लिये ३ × ५ अथवा १५ से गुणा करना चाहिए।

∴ अभीष्ट संख्या = १५ उत्तर

(६०) ५१२ को किस सबसे छोटी संख्या से गुणा किया जाये कि गुणनफल एक पूर्ण वर्ग हो जाये ?

(६१) २६४० को किस सबसे छोटी संख्या से गुणा किया जाये कि गुणनफल एक पूर्ण वर्ग हो जाये ?

नम्बर १२—(६२) वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जिससे ५७८ को भाग देने से भागफल एक पूर्ण वर्ग बन सके।

क्रिया :—५७८ = १७ × १७ × २ = $१७^२$ × २

किन्तु पूर्ण वर्ग दो समान खण्ड होने चाहिये।

∴ ५७८ को पूर्ण वर्ग बनाने के लिये २ से भाग दिया।

∴ अभीष्ट संख्या = २ उत्तर

(६३) वह कौन-सी सबसे छोटी संख्या है जिससे ७२६ को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण वर्ग होगा ?

(६४) वह कौन-सी सबसे छोटी संख्या है जिससे २२५० को भाग देने पर भागफल एक पूर्ण वर्ग होगा।

नम्बर १३—(६५) वह कौन-सी सबसे छोटी वर्ग संख्या है जो ८, १५, २४ से पूरी-पूरी बँट सकती है ?

क्रिया :—८, १५, २४ का ल० स० = १२०

परन्तु $१२० = २ \times २ \times २ \times ३ \times ५ = २^२ \times २ \times ३ \times ५$

$\therefore$ सबसे छोटी अभीष्ट वर्ग संख्या $= २^२ \times २^२ \times ३^२ \times ५^२$

$= ४ \times ४ \times ६ \times २५$

$= ३६००$ उत्तर

(६६) वह सबसे छोटी संख्या बताओ जो १०, १५, ३२, ४० से पूरी-पूरी बँट सके।

(६७) एक फौज में कम से कम कितने सिपाही हो सकते हैं जिनसे ६, ९, १५ व २४ की गहराई की पंक्ति और उनका एक ठोस वर्ग भी बन सके।

नम्बर १४—(६८) कुछ व्यक्ति इस पर एकमत हुए कि उनमें से प्रत्येक उतनी ही पाई चन्दा देगा जितनी कि उनकी संख्या है। यदि कुल चन्दा ३४ रु० २ आ० ६ पा० प्राप्त हुआ हो तो देने वालों की संख्या बताओ।

क्रिया :—३४ रु० २ आ० ६ पा० = ६५६१ पा०

मान लिया चन्दा देने वाले कुल व्यक्ति अ हैं और प्रत्येक ने अ पा० दी।

तब कुल चन्दा = अ × अ = $अ^२$ पा०

$\therefore$ $अ^२$ = ६५६१ पाई

$\therefore$ अ $= \sqrt{५५६१} = ८१$

$\therefore$ चन्दा देने वालों की संख्या = ८१ उत्तर

(६९) यदि कुछ व्यक्ति नेहरू कोष में उतने आने चन्दा देने के लिए सहमत हुए जितने वे कुल थे और ३५१ रु० ६ आ० चन्दा प्राप्त हुआ, तो बताओ चन्दा देने वालों की संख्या कितनी थी।

(७०) एक व्यक्ति ने अपने बाग में पेड़ों की पंक्तियाँ इस प्रकार लगवाईं कि प्रत्येक पंक्ति में उतने ही पेड़ रहें जितनी कि पंक्तियाँ हैं। यदि पेड़ों की कुल संख्या ४७६१ हो तो बाग में पंक्तियों की संख्या बताओ।

(७१) एक फौजी अफसर अपनी फौज को जिसमें कि ३७२४९ सिपाही हैं

इस प्रकार व्यवस्था देना चाहता है कि प्रत्येक पंक्ति में इतने सिपाही हों जितनी कि उनकी पंक्तियाँ हो सकें, तो प्रत्येक पंक्ति के सिपाहियों की संख्या बताओ।

(७२) मुझे कुछ भिखारी मिले और मैंने प्रत्येक भिखारी को कुल भिखारियों की संख्या के आधे के बराबर पैंस दिये। यदि मैंने कुल ६ पौं० १ शि० ६ पैं० खर्च किये तो भिखारियों की संख्या ज्ञात करो।

(७३) एक अध्यापक ने ६६२ विद्यार्थियों को ड्रिल के समय एक ठोस वर्ग की शकल में खड़ा किया। इस प्रकार १ विद्यार्थी बच रहा। अगली पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या बताओ।

नम्बर १५—(७४) यदि तीन अंकों में से प्रत्येक दो-दो अंकों का गुणनफल क्रमशः ५, ८, १० है तो अंकों को ज्ञात करो।

क्रिया :—मान लिया कि अंक अ, ब, स, हैं।

तो उनमें से प्रत्येक दो-दो का गुणनफल = अ ब, अ स, ब स

किन्तु अ ब = ५, अ स = ८, ब स = १०

अ ब, अ स, ब स को परस्पर गुणा करने पर,

अ ब × अ स × ब स = ५ × ८ × १०

या, $अ^२ ब^२ स^२$ = ४००

अब दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर,

$\sqrt{अ^२ ब^२ स^२} = \sqrt{४००}$

या, अ ब स = २०

किन्तु उक्त फल को अ ब, अ स, ब स से भाग देने पर

अ = २, ब = $२\frac{१}{२}$, स = ४

∴ अभीष्ट अंक २, $२\frac{१}{२}$ व ४ हैं। **उत्तर**

(७५) दो अंकों का गुणनफल ४० और भागफल $\frac{२०}{१}$ है तो वह अंक ज्ञात करो।

(७६) तीन संख्याओं में से प्रत्येक दो दो संख्याओं का गुणनफल क्रमशः ८, ११·२५ व १४·४ है तो उन संख्याओं को ज्ञात करो।

(७७) तीन संख्याओं में से पहली और दूसरी का गुणनफल ३, दूसरी और तीसरी का गुणनफल ४$\frac{३}{८}$, पहली और तीसरी का गुणनफल ८$\frac{२}{६}$ है। तो उन तीनों संख्याओं को ज्ञात करो।

मिश्रित :—(७८) $\frac{\sqrt{२-१}}{\sqrt{२+१}}$ को सरल करो।

(७९) सिद्ध करो कि ६१२५ पूर्ण वर्ग है।

(८०) ज्ञात करो कि ३८८६४ पूर्ण वर्ग है या नहीं।

(८१) $\sqrt{८१\frac{१६}{२५}} \times \sqrt{८{\cdot}१}$ (उ० प्र०, १९३४)

(८२) ६६३·०६२५ का वर्गमूल निकालो। (उ० प्र०, १९४६)

(८३) ११६४·१७४४ का वर्गमूल निकालो। (उ० प्र०, १९४७)

आठवाँ अध्याय

माध्य या औसत

हरी और रामू दोनों रिक्शा चलाते हैं। हम उनकी रोजाना की मजदूरी की तुलना करते हैं।

उनकी प्रति दिन की मजदूरी यह है :—

दिन	हरी की आय	रामू की आय
पहला	४ रुपये	३ रुपये
दूसरा	६ रुपये	७ रुपये
तीसरा	५ रुपये	८ रुपये

किसी दिन हरी की आय और किसी दिन रामू की आय अधिक हुई। फिर किसकी अधिक आय हुई? इस प्रश्न का उत्तर दो विधियों से निकाला जा सकता है।

(१) तीनों दिन की आय का योगफल लें।

(२) हिसाब लगाकर निकालें कि प्रतिदिन दोनों की कितनी-कितनी आय होती है। विधि दोनों ठीक हैं, परन्तु तुलना करने के लिये दूसरी विधि अधिक सरल और उपयोगी है। यदि बहुत सी राशियों से काम पड़े तो उनका योगफल भी बड़ा होगा और बड़ी राशियों की तुलना करना अप्रिय होगा। इसलिये दूसरी विधि ही प्रचलित है।

तीनों दिनों की आय का योगफल	प्रतिदिन की आय
हरी की आय	
=(४+६+५) रु०	= $\frac{१५}{३}$ रु० = ५ रु०
रामू की आय	
=(३+७+८) रु०	= $\frac{१८}{३}$ रु० = ६ रु०

इसलिए रामू की आय अधिक हुई।

हमने ३ दिन की आय को ३ पर विभाजित कर प्रति दिन की आय निकाली है। यह औसत आय कहलाती है। यह किसी विशेष दिन की आय नहीं है बल्कि तीनों दिनों की आय के बीच की एक राशि है जिसको ३ से गुणा करने पर कुल तीन दिन की आय निकल सकती है।

यदि हरी की इन आयों के स्थान पर ५ रखें तो भी ५, ५, ५ रुपयों का योगफल १५ रुपये ही होगा।

∴ ४, ६ और ५ का औसत ५ रु० हुआ। इसी प्रकार रामू की तीन दिन की आय का औसत भी ६ रु० होगा।

निम्नलिखित उदाहरणों को ध्यानपूर्वक पढ़ने से औसत निकालने की विधि और भी भली-भाँति स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण १ :—एक लड़का पहले दिन ६ प्रश्न निकालता है और दूसरे दिन ४। बताओ वह रोज औसतन कितने प्रश्न निकालता है।

क्रिया:—दो दिन में वह लड़का ६ और ४ कुल १० प्रश्न निकालता है, इसीलिये रोज का औसत ५ प्रश्न है। इससे यह पता लगा कि दो संख्याओं के जोड़ का आधा उन संख्याओं का औसत होता है।

उदाहरण २ :—एक आदमी पहले दिन १५ मील, दूसरे दिन २० मील और

तीसरे दिन १३ मील चला। बताओ उसके चलने का प्रति दिन का क्या औसत है।

क्रिया :—वह आदमी ३ दिन में जितना चला वह १५ मील, २० मील और १३ मील है, अर्थात् १५ + २० + १३ = ४८ मील

इसलिये उसके प्रतिदिन चलने का औसत

$$= \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{तीन दिन}} = \frac{४८}{३} = १६ \text{ मील}$$

इसलिए तीन संख्याओं के जोड़ का तीसरा हिस्सा या तिहाई तीनों संख्याओं का औसत होता है।

विधि :—यदि किन्हीं दी हुई संख्याओं का औसत ज्ञात करना हो तो उन सबके योगफल को उनकी संख्या से भाग दो।

प्रश्नावली ८

खण्ड क—नम्बर १—(१) ५, ८, ११, १६ तथा २० का औसत निकालो।

क्रिया :—संख्याओं की गणना = ५

संख्याओं का योगफल = (५ + ८ + ११ + १६ + २०) = ६०

∴ औसत $= \frac{६०}{५} = १२$ उत्तर।

नियम :—विभिन्न संख्याओं को योग करके उनकी गणना से योगफल को भाग दे दो।

उपप्रमेय :—यदि कुछ संख्याओं का औसत दिया हुआ हो तो उन संख्याओं का योगफल उन संख्याओं के औसत और गणना के गुणनफल के बराबर होता है।

(२) १५, १७, २०, २५, ३३ का औसत निकालो।

(३) $७\frac{3}{4}$, $३\frac{3}{4}$, $५\frac{3}{8}$, $८\frac{3}{16}$ व $१३\frac{1}{4}$ का माध्य निकालो।

(४) ३·५, ८·४, १३·८, ७·८ व ६·७ का माध्य निकालो।

(५) किसी स्कूल रजिस्टर में उपस्थिति की संख्या सोमवार के दिन ८३, मंगल को ८०, बुध को ७५, वृहस्पति को ८१, शुक्र को ७७, तथा शनिवार को ७२ थी। तो उस स्कूल की औसत प्रति दिन उपस्थिति ज्ञात करो।

(६) राम एक काम को ३ दिन में करता है, मोहन ४ दिन में और सोहन ६ दिन में। हरी का १ दिन का काम इन तीनों के १ दिन के काम का औसत है। हरी इस काम को कितने दिन में पूरा करेगा।

(७) इमले की परीक्षा में २५ विद्यार्थी सम्मिलित हुए। ७ ने बिल्कुल शुद्ध लिखा, ८ ने एक-एक गल्ती की, ७ ने तीन-तीन गल्ती की और शेष ने सात-सात गल्तियाँ की। सब की औसत गल्तियाँ ज्ञात करो।

(८) यदि एक महाजन को चौथाई धन पर ३ प्रतिशत, दो-तिहाई धन पर ५ प्रतिशत, और शेष धन पर ११ प्रतिशत ब्याज मिलें, तो कुल धन पर उनको कितने प्रतिशत ब्याज मिलता है।

(९) क्रिकेट के तीन खिलाड़ियों का पूरी ईनिंग्स का औसत एक दशमलव अंक तक निम्नलिखित की सहायता से निकालो :—

नाम	कुल रन	ईनिंग्स	नाट आउट
प्रन्सारी	१५०५	२६	१
डेविड	१८०३	३३	३
वाजपाई	२१०७	३७	२

(१०) निम्नलिखित तालिका में ब्राह्मण और वैश्य स्कूलों की एक सप्ताह की उपस्थिति का ब्यौरा दिया हुआ है। यदि प्रत्येक दिन दो मीटिंग हों तो प्रत्येक स्कूल की प्रति मीटिंग की उपस्थिति का माध्य ज्ञात करो :—

	सोमवार	मंगल	बुध	वृहस्पति	शुक्र	शनीचर	मीटिंग
ब्राह्मण	२३४	२६८	२८०	२७१	२८२	....	१
	२७०	२६५	....	२५०	२७८	२६२	२
वैश्य	....	३१८	२६५	२६०	३१०	३२२	१
	३१५	२६६	१०	२६८	३०४	३२८	२

नम्बर २–(११) ३ बैलों तथा ४ गउओं का औसत मूल्य ७८ रु० है। जब कि उसमें केवल गउओं का औसत मूल्य ४५ रु० है तो बैलों का औसत मूल्य निकालो।

क्रिया ३ :—बैलों तथा ४ गउओं का मूल्य = औसत मूल्य × उनकी संख्या की गणना।

	= (७८ × ७) रु०	= ५४६ रु०
४ गउओं का मूल्य	= (४५ × ४) रु०	= १८० रु०
∴ ३ बैलों का मूल्य	= (५४६ − १८०) रु०	= ३६६ रु०
∴ बैलों का औसत मूल्य	= (३६६ ÷ ३) रु०	= १२२ रु०

उत्तर

(१२) ८ पुरुष, ७ स्त्री तथा १ बालक की औसत आयु ४५ वर्ष है। यदि ८ पुरुषों की ४८, तथा ७ स्त्रियों की ४६ वर्ष औसत आयु हो तो बालक की आयु ज्ञात करो।

(१३) यदि ५ ग्रामों की जनसंख्या क्रमशः १२३६, ४५२, ३६४, ५१६ व ३४३० हो तो बताओ कि छठे ग्राम की जनसंख्या क्या होनी चाहिए जिससे कि उन सब की औसत जनसंख्या १२५६·५ हो जाये।

(१४) किसी ७५० बालकों की पाठशाला में बालकों की औसत आयु १५·४ वर्ष है। यदि उनमें से ५० छोड़कर चले जायँ तो शेष की औसत आयु १५·३ वर्ष रह जाती है। तो छोड़कर जाने वालों की औसत आयु बताओ।

(१५) ५ मास के लिए किसी मनुष्य का औसत व्यय १२० रु० तथा अगले ४ मास के लिए ८० रु० है। यदि उसने २५ रु० बचा लिए हों तो उसकी मासिक आय बताओ।

खंड ख—नम्बर ३—(१६) यदि दस परीक्षाफलों का औसत १·०१५ हो, और उनमें प्रथम ६ का १.०१२ तथा पिछले ५ का औसत १·०१६ हो, तो छठा फल ज्ञात करो।

क्रिया :—१० परीक्षाफलों का योगफल

= उनका औसत × १०

= १·०१५ × १० = १०·१५

पहिले ६ का योगफल

= १·०१२ × ६ = ६·०७२

तथा पिछले ५ का योगफल

= १·०१६ × ५ = ५·०८

∴ पहिले ५ परीक्षाफलों का योगफल

= दस परीक्षाफलों का योगफल–पिछले पाँच परीक्षाफलों का योगफल

= १०·१५ – ५·०८ = ५·०७

∴ छठाँ परीक्षाफल

= पहिले ६ फलों का योगफल—पहिले ५ फलों का योगफल

= ६·०७२ – ५·०७ = १·००२ **उत्तर**

(१७) २५ परीक्षाफलों का औसत १८ है, और उनमें पहिले १२ का १६ तथा पिछले १२ का १६ है तो तेरहवाँ फल ज्ञात करो।

(१८) दस संख्याओं का औसत १५·३४ तथा पहिली पाँच का १४·३५ और पिछली ६ का १५·४३ है। पाँचवीं संख्य अशुद्ध है, तो शेष का औसत निकालो।

(१६) सन् १६१५ से १६१६ तक किसी बाबू की औसत आय ३७५ रु०, तथा १६१६ से १६२० तक ३८० रु० थी। यदि उसकी आय सन् १६२० में ३६८ रु० रही हो तो उसकी सन् १६१५ की आय ज्ञात करो।

(२०) यदि मंगल, बुध, बृहस्पति का औसत तापमान ७४° तथा बुध, बृहस्पति, शुक्र का ७८° हो और शुक्रवार का तापमान ७५° रहा हो तो मंगल का तापमान बताओ।

(२१) १० परीक्षाफलों का औसत १७$\frac{1}{2}$ तथा पहिले ३ का १६$\frac{1}{3}$ व अगले ४ का १६$\frac{1}{2}$ हो और यदि उनमें आठवाँ नवें से ३ कम और दसवें से ४ कम हो तो अन्तिम फल ज्ञात करो।

नम्बर ४—(२२) ३० विद्यार्थियों का किसी कक्षा में औसत भार १०० पौंड है और यदि इसमें शिक्षक का भार भी सम्मिलित कर लिया जाये तो औसत १ बढ़ जाता है, तो शिक्षक का भार ज्ञात करो।

क्रिया :—३० विद्यार्थियों का कुल भार = ३० × १०० पौं० = ३००० पौं०

तथा ३० विद्यार्थियों व शिक्षक का भार

= (३० + १) × १०१ पौं० = ३१३१ पौंड

∴ शिक्षक का भार = (३१३१ − ३०००) पौं० = १३१ पौं० उत्तर

(२३) ६ प्राइवेट विद्यार्थियों से एक शिक्षक की औसत आय में जबकि एक ३५ रु० देने वाला विद्यार्थी चला जाता है, तथा उसका स्थान एक नया विद्यार्थी ले लेता है, २ रु० मासिक की कमी हो जाती है, तो बताओ कि नया विद्यार्थी क्या देता है।

(२४) किसी नाव में ८ माँझी लोगों का औसत भार यदि उनमें से एक माँझी जिसका भार १२ स्टोन है उतार दिया जाये तथा और कोई नया बिठा दिया जाये तो २ पौंड बढ़ जाता है। तो नये आने वाले माँझी का भार बताओ।

(२५) ७ व्यक्तियों का औसत भार, यदि उनमें से एक जिसका बोझ १० स्टोन है किसी नये आदमी के बदले निकाल दिया जाये, ३ पौंड कम हो जाता है, तो आने वाले आदमी का भार बताओ।

सूचना :—१ स्टोन = १४ पौं०

(२६) पाँच व्यक्तियों के कुटुम्ब की आयु का माध्य २० वर्ष है। यदि सबसे छोटे व्यक्ति की आयु ८ वर्ष हो तो उसके जन्म के समय दूसरे व्यक्तियों की आयु का माध्य क्या था?

खण्ड ग—नम्बर ५—(२७) किसी छात्रालय में ४० विद्यार्थियों का १ चौका था। उनमें १२ व्यक्ति और बढ़ जाने से मासिक खर्चा ६८ रु० अधिक हो गया जबकि प्रत्येक व्यक्ति का औसत खर्च १ रु० कम हो गया। तो उनका प्रति मास असली व्यय ज्ञात करो।

क्रिया :—जबकि विद्यार्थियों की संख्या १२ बढ़ जाती है, तो व्यय ६८ रु० अधिक होता है, किन्तु प्रत्येक विद्यार्थी का खर्च १ रु० कम हो जाता है।

∴ पिछले ४० विद्यार्थियों के व्यय में ४० रु० की बचत है।

∴ १२ नये विद्यार्थियों का व्यय = (६८ + ४०) = १०८ रु०

∴ १ .... = $\frac{१०८}{१२}$ रु० = ९ रु०

∴ पहिले १ विद्यार्थी का व्यय = (९ + १) रु० = १० रु०

∴ पहला मासिक व्यय = (१० × ४०) = ४०० रु० उत्तर

(२८) किसी ५० रोगियों के अस्पताल के डाक्टर को १० रोगी और बढ़ जाने पर ज्ञात हुआ कि उसका मासिक व्यय ३० रु० अधिक बढ़ गया। किन्तु प्रत्येक रोगी के व्यय में १ रु० की कमी हुई तो बताओ अस्पताल का मासिक व्यय कितना है।

(२९) किसी छात्रालय में विद्यार्थियों की संख्या ७० से ८५ हो जाने पर उसके अध्यक्ष को ज्ञात हुआ कि चौके का मासिक खर्च ४५ रु० बढ़ गया किन्तु प्रत्येक व्यक्ति के खर्च में १ रु० ८ आने की कमी हुई। तो बताओ छात्रालय का असली मासिक व्यय क्या था।

नम्बर ६-(३०) एक परीक्षा में किसी कक्षा के $\frac{१}{५}$ विद्यार्थियों ने कुल अंकों का $\frac{७}{८}$, $\frac{१}{१०}$ ने $\frac{३}{४}$, $\frac{२}{५}$ ने $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$ ने $\frac{१}{४}$ और शेष ने $\frac{१}{८}$ प्राप्त किया। यदि कक्षा के सारे विद्यार्थियों के अंकों का औसत १६६ हो तो कुल अंकों की संख्या बताओ।

क्रिया :— $\frac{१}{५} + \frac{१}{१०} + \frac{२}{५} + \frac{१}{४} = \frac{४ + २ + ८ + ५}{२०} = \frac{१९}{२०}$

∴ $१ - \frac{१९}{२०} = \frac{१}{२०}$

∴ कुल संख्याओं का औसत = $\frac{\text{उनका योगफल}}{\text{उनकी संख्या}}$

∴ कुल अंकों का $\frac{\frac{१}{५} \times \frac{७}{८} + \frac{१}{१०} \times \frac{३}{४} + \frac{२}{५} \times \frac{१}{२} + \frac{१}{४} \times \frac{१}{४} + \frac{१}{२०} \times \frac{१}{८}}{\frac{१}{५} + \frac{१}{१०} + \frac{२}{५} + \frac{१}{४} + \frac{१}{२०}}$

$= १६६$

∴ कुल अंकों का $\frac{८३}{१६०} = १६६$

∴ कुल अंक $= \frac{१६६ \times १६०}{८३} = ३२०$ उत्तर

(३१) पिछले वर्ष दसवीं कक्षा के परीक्षार्थियों में से $\frac{१}{३}$ ने $\frac{४}{५}$, $\frac{१}{६}$ ने $\frac{३}{४}$, $\frac{१}{१२}$ ने $\frac{२}{३}$, $\frac{१}{१८}$ ने $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३६}$ ने $\frac{१}{२}$ और $\frac{१}{४}$ ने $\frac{१}{५}$ तथा शेष ने कुल अंकों का $\frac{१}{३}$ प्राप्त किया। यदि प्रत्येक विद्यार्थी के अंकों का औसत २०६ रहा हो तो कुल अंकों की संख्या बताओ।

विविध :-(३२) १६ दाँव तक किसी क्रिकेट के खिलाड़ी ने किसी औसत से अपने रन बनाए, किन्तु १७वें दाँव पर उसने ८५ रन बनाये, जिससे कि उसका औसत प्रति दाँव ३ बढ़ गया तो बताओ कि १७वें दाँव के बाद से उसका औसत कितना रहा।

क्रिया :—१७ दाँवों का औसत प्रति दाँव ३ बढ़ गया।

∴ कुल १७ दाँवों में बढ़े हुए रनों की संख्या = १७ × ३ = ५१

किन्तु १७ वें दाँव पर खिलाड़ी ने ८५ रन बनाए।

∴ १६ दाँवों के लिए उसका औसत = ८५ − ५१ = ३४

या, १७ वें दाँव के बाद से उसका औसत = (३४ + ३) = ३७ उत्तर

(३३) गांधी विद्यालय की एक कक्षा के पहले २४ विद्यार्थियों की औसत आयु १४ वर्ष १० माह है और शेष विद्यार्थियों की औसत आयु १६ वर्ष ६ माह है। यदि कक्षा के सब विद्यार्थियों की औसत आयु १५ वर्ष २ माह है तो कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या बताओ।

(३४) एक प्रकाशक ने १०००० पुस्तकें कुछ रुपयों में छपवाईं। यदि वह १०००० के स्थान पर १४००० पुस्तकें छपवाता तो उसको ११६ रुपया और देने पड़ते, परन्तु औसत २ रु० ८ आ० प्रति हजार कम हो जाता। बताओ छपाई का औसत व्यय प्रति हजार क्या था।

(३५) क ने गत वर्ष ८० बीघे गेहूँ बोये, और इस वर्ष उसने २० बीघे अधिक बोये। उसकी कुल उपज गत वर्ष से केवल ६० मन अधिक रही, जब कि इस वर्ष उपज $१\frac{१}{२}$ मन प्रति बीधा कम हुई। बताओ उसकी उपज गत वर्ष कितनी थी।

(३६) एक स्थान से इतवार, सोमवार, शुक्रवार और शनिवार को होकर जाने वाले मनुष्यों की संख्या का औसत १७६५ है और मंगलवार, बुधवार और बृहस्पतिवार को उसी स्थान से होकर जाने वाले मनुष्यों की संख्या का औसत १५४१ है, तो उस स्थान से प्रतिदिन होकर जाने वाले आदमियों का पूरे सप्ताह का औसत निकालो। (उ० प्र०, १६३२)

(३७) किसी मनुष्य का ११ महीने के मासिक खर्चे का औसत ७५ रु०

है। बारहवें महीने में ज्यादा खर्च होने के कारण उसका औसत ५ रुपये प्रति मास बढ़ गया तो बताओ बारहवें महीने का क्या खर्चा था।

(उ० प्र०, १६३६)

(३८) निम्नलिखित संख्याओं का औसत २५ है। तो य का मान निकालो :—

४०, १५, १८, २२, २६, १२, य, २६, ३२ (उ० प्र०, १६४१)

(३६) एक सौदागर की वार्षिक आय का औसत सन् १६२१ से १६३१ तक का ६१५ रुपये ४ आना है। इसमें सन् १६२१ और सन् १६३१ की आय भी सम्मिलित है। १६२१ ई० में उसने ३८७ रुपये १ आना ४ पाई और १६३२ में ७४७ रुपये ५ आने ४ पाई प्राप्त किए, तो उसका सन् १६२२ से १६३२ तक का वार्षिक औसत क्या होगा, जब कि १६२२ और १६३२ दोनों वर्ष भी इसमें सम्मिलित हैं? (उ० प्र०, १६४६)

नवाँ अध्याय

अनुपात और समानुपात

१. अनुपात समान जाति की किन्हीं दो राशियों के परस्पर सम्बन्ध को कहते हैं। यह बहुधा एक भिन्न के द्वारा प्रकट किया जाता है, जिसका अंश पहली तथा हर दूसरी राशि होती है।

उदाहरण :—४ सेर का ५ सेर के साथ अनुपात $\frac{४}{५}$ लिख कर प्रकट किया जाता है। इसके अतिरिक्त यह ४ : ५ भी लिखकर प्रकट किया जाता है।

चेतावनी—यदि राशियाँ दो प्रकार की हों तो उनमें अनुपात नहीं प्राप्त किया जा सकता। ३ आम तथा ७ मन में कोई अनुपात नहीं है।

अनुपात की दोनों राशियों में से प्रथम 'पूर्व पद' तथा, दूसरी 'उत्तर पद' कहलाती है और वे दोनों मिलकर अनुपात के पद कहलाते हैं।

२. एक से अधिक अनुपातों के पूर्व पदों के गुणनफल को नया पूर्व पद तथा उत्तर पदों के गुणनफल को नया उत्तर पद मान कर जो नया अनुपात बनता है उसे मिश्रितसमानुपात कहते हैं।

उ०—२×४×६ : ३×५×७ या ४८:१०५ यह २:३, ४:५ तथा ६:७ का मिश्रसमानुपात है।

३. समानुपात दो अनुपातों की समानता प्रकट करता है। जिन चार राशियों की परस्पर तुलना की जाती है उनमें प्रथम तथा चतुर्थ **बाह्य पद** और द्वितीय तथा तृतीय को **मध्य पद** कहते हैं।

उ०—$\frac{५}{६} = \frac{१००}{१२०}$

सूचनाः—समानुपात दो अनुपातों की समानता को प्रकट करता है, इसलिये यह आवश्यक है कि उन दोनों में सजातीय राशियाँ हों, किन्तु चार के समान जाति होने की आवश्यकता नहीं है।

४. चतुर्थानुपाती—जब दो अनुपात समान होते हैं तो उनकी चारों राशियाँ 'समानुपाती' कहलाती हैं और उनमें से चतुर्थ, प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय की चतुर्थानुपाती कही जाती है।

उ०—$\frac{५}{६} = \frac{१००}{१२०}$ में १२० चतुर्थानुपाती है।

समानुपात निम्नलिखित किसी प्रकार से प्रकट किया जा सकता है।

(१) $\frac{५}{६} = \frac{१००}{१२०}$ (२) ५ : ६ = १०० : १२० (३) ५ : ६ :: १०० : १२०। उपरोक्त उदाहरण से स्पष्ट है कि ५×१२० = ६×१००

∴ यदि चार राशियाँ समानुपाती हों तो बाह्य पदों का गुणनफल, मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

५. विततानुपात :—

तीन सजातीय राशियाँ विततानुपात में उस समय कही जाती हैं जब कि पहली का दूसरी के साथ यही अनुपात हो जो कि दूसरी का तीसरी के साथ है।

३, ९ व २७ विततानुपात में हैं कारण कि ३ : ९ = ९ : २७। इस दशा में २७ को ३ व ९ का तृतीयानुपाती और ९ को ३ और २७ का मध्यानुपाती कहते हैं।

उक्त उदाहरण ३ : ९ = ९ : २७ से हमको स्पष्ट है कि

$$३ \times २७ = ९ \times ९ = ९^{२} = ८१$$

∴ यदि तीन राशियाँ विततानुपात में हों तो बाह्य पदों का गुणनफल पदों के वर्ग के बराबर होता है।

९. समानुपात के प्रकार :—

(१) जब दो राशियाँ परस्पर इस प्रकार सम्बन्धित हों कि यदि उनमें से एक को किसी संख्या से गुणा अथवा भाग किया जाये तो दूसरी भी उससे गुणा या भाग हो जाए, अथवा दूसरे शब्दों में यदि उनमें से एक घटती-बढ़ती हो तो दूसरी भी उसी प्रकार न्यूनाधिक हो तो उस दशा में उनको एक दूसरे को **अनुलोमानुपाती** कहते हैं।

उ०—यदि १० सेर चावल का मूल्य २ रु० है तो १५ सेर चावल का मूल्य ३ रु० तथा ५ सेर का मूल्य १ रु० होगा। इसका तात्पर्य यह है कि चावल का मूल्य उसके भार का अनुलोमानुपाती है।

इसी प्रकार—

(अ) किसी मकान का किराया उसके घिरे रहने के समय का अनुलोमानुपाती है।

(ब) किसी गाड़ी का भाड़ा उसके भार तथा दूरी का अनुलोमानुपाती है।

(स) उठे हुए पानी का भार बिजली की शक्ति का अनुलोमानुपाती है।

(द) रोटी का मूल्य आटे के मूल्य का अनुलोमानुपाती है। इत्यादि..........।

(२) जब दो राशियाँ परस्पर इस प्रकार सम्बन्धित होती हैं कि यदि उसमें से एक को किसी संख्या से गुणा करें तो दूसरी उसी से भाग हो जाये और इसके विपरीत भी ऐसे ही हो अथवा थोड़े शब्दों में यदि एक किसी सीमा तक अधिक की जाये, तो दूसरी उतनी ही न्यून हो जाये तथा इसके विपरीत भी इसी प्रकार हो तो उस दशा में उनको एक दूसरे का **विलोमानुपाती** कहते हैं।

उ०—यदि ४ मनुष्य किसी काम को १० दिन में पूरा करते हैं, तो ८ मनुष्य उसको ५ दिन तथा २ मनुष्य उसको २० दिन में करेंगे, इससे विदित है कि मनुष्यों की संख्या दिन की गणना की विलोमानुपाती है।

इसी प्रकार—

(अ) समय, गति का विलोमानुपाती है।

(ब) किसी फर्श की लम्बाई, चौड़ाई का विलोमानुपाती है।

(स) किसी फौज की खाद्य सामग्री कितने काल तक पर्याप्त होगी, वह समय मनुष्यों की संख्या का विलोमानुपाती है इत्यादि.........

प्रश्नावली ९

खंड क—नम्बर १—(१) १२ रु० और २० रु० का अनुपात ज्ञात करो।

क्रिया :—अभीष्ट अनुपात = १२ रु० : २० रु०

$= \frac{१२}{२०} = \frac{३}{५} =$ ३ : ५ **उत्तर**

सूचना :—अनुपात केवल गणना के अंक ही होते हैं।

अनुपात ज्ञात करो :—

(२) १४ : २१ (३) ७२ : ११२ (४) ४२ : १४

(५) २५ मन : १२५ मन (६) १३ पौं० १० शि० : ११ पौं० : ५ शि०

(७) १ टन १२ हण्ड्रेडवेट : २ टन

नम्बर २—(८) ३ : ५ तथा ५ : १२ की तुलना करो।

क्रिया :— ३ : ५ $= \frac{३}{५}$ और ५ : १२ $= \frac{५}{१२}$

अब, $\frac{३}{५}$ तथा $\frac{५}{१२}$ के हर समान करने पर,

$$३ : ५ = \frac{३}{५} = \frac{३ \times १२}{५ \times १२} = \frac{३६}{६०}$$

$$\text{तथा } ५ : १२ = \frac{५}{१२} = \frac{५ \times ५}{१२ \times ५} = \frac{२५}{६०}$$

किन्तु $\frac{३६}{६०}$ अधिक हैं $\frac{२५}{६०}$ से,

∴ $\frac{३}{५}$ भी $\frac{५}{१२}$ से अधिक है,

∴ ५ : १२ की अपेक्षा ३ : ५ बड़ा है। उत्तर

सूचना :—तुलना करने के लिए सभी भिन्नों के हर समान कर लेने चाहिए।

निम्नांकित अनुपातों की सापेक्षता ज्ञात करो :—

(६) ४ : ६ तथा ७ : १२ (१०) $२\frac{१}{३}$: $३\frac{१}{२}$ तथा $६\frac{१}{१०}$: $१०\frac{१}{६}$।

निम्नांकित में कौन अधिक है?

(११) ५ गज : ६ फुट तथा २ मन : ३२ सेर।

(१२) १५ आ : ७ रु० तथा ६ सेर : १२ छ०।

नम्बर ३—(१३) २ : ३, ४ : ५ तथा ६ : ७ का मिश्रित अनुपात ज्ञात करो।

क्रिया :—मिश्रित अनुपात = (२ × ४ × ६) : (३ × ५ × ७)

= ४८ : १०५ उत्तर

निम्नांकित अनुपातों का मिश्रित अनुपात ज्ञात करो :—

(१४) ३ : ५, ७ : ६ और ११ : १३

(१५) ३ : ४, ६ : २०, ११ : १५ और १७ : १२

नम्बर ४—(१६) ३, ८ तथा १२ का चतुर्थानुपाती ज्ञात करो।

क्रिया :—माना कि चतुर्थानुपाती क है।

तब, ३ : ८ : : १२ : क

किन्तु वाह्य पदों का गुणनफल बराबर है मध्य पदों के गुणनफल के,

∴ ३ × क = ८ × १२

$$\therefore क = \frac{८ \times १२}{३} = ३२$$

∴ अभीष्ट चतुर्थानुपाती = ३२ उत्तर

निम्नांकित का चतुर्थानुपाती ज्ञात करो :—

(१७) १२, २५ तथा ३० (१८) $८\frac{१}{४}$, $७\frac{१}{२}$ तथा २२

(१६) ६ मील, २० मील, ६ घन्टे ।

(२०) $\frac{७}{८}$ तथा $\frac{१}{११}$ के योग, अन्तर तथा गुणन का चतुर्थानुपाती ज्ञात करो ।

नम्बर ५—(२१) ३६ तथा ६४ का मध्यानुपाती ज्ञात करो ।

क्रिया:—माना कि ३६ तथा ६४ का मध्यानुपाती क है

∴ ३६ : क : : क : ६४

किन्तु बाह्य पदों का गुणनफल बराबर होता है मध्य पदों के वर्ग के,

∴ $क^{२} = ३६ \times ६४$,

या, $क = \sqrt{(३६ \times ६४)} = ६ \times ८ = ४८$

∴ अभीष्ट मध्यानुपाती = ४८ **उत्तर**

निम्नांकित का मध्यानुपाती ज्ञात करो :—

(२२) ५ तथा १२५ (२३) ४ तथा ४६ (२४) $\frac{१}{२}$ तथा $\frac{१}{८}$

निम्नलिखित समानुपातों में क का मान बताओ :—

(२५) १२ : क : : क : १४७ (२६) ६४ : क : : क : २२५

नम्बर ६—(२७) ५ तथा १५ का तृतीयानुपाती ज्ञात करो ।

क्रिया:—माना कि ५ तथा १५ का तृतीयानुपाती क है,

∴ ५ : १५ : : १५ : क

किन्तु बाह्य पदों का गुणनफल, मध्य पद के वर्ग के समान होता है,

∴ $५ \times क = १५ \times १५$; या $क = \frac{१५ \times १५}{५} = ४५$

∴ अभीष्ट तृतीयानुपाती = ४५ **उत्तर**

तृतीयानुपाती ज्ञात करो :—

(२८) $२\frac{१}{४}$ तथा $७\frac{१}{२}$ (२९) $५\frac{१}{४}$ तथा ७ (३०) म तथा न ।

निम्नलिखित समानुपातों को पूर्ण करो :—

(३१) ४ : [ ] : : १२ : ६ (३२) [ ] : १६ : : ६ : १२

(३३) ८३२ : १२२ : : [ ] : २४४० (३४) $\frac{२}{९}$: $\frac{१}{४}$: : $\frac{३}{८}$: [ ].

(३५) ३ : ५ का वर्गानुपात ज्ञात करो ।

(३६) २२५ : ३२४ का वर्गमूलानुपात ज्ञात करो ।

(३७) ६ ::११ का घनानुपात ज्ञात करो ।

(३८) १३३१ : १७२८ का घनमूलानुपात निकालो ।

खंड ख—नम्बर ७–(३६) यदि अ : ब इसी प्रकार हों जैसे कि ३ : ४ ब:स इसी प्रकार हों जैसे ५:७ तथा स : द वैसे ही जैसे कि ८ : ९ हों, तो अ ब स तथा द का विततानुपात ज्ञात करो ।

क्रिया :—

अ : ब = ३ : ४

ब : स = ५ : ७ = १ : $\frac{७}{५}$ = ४ : $\frac{२८}{५}$

स : द = ८ : ९ = १ : $\frac{९}{८}$ = $\frac{२८}{५}$: $\frac{६३}{१०}$

टीका : अनुपात के पदों को इस प्रकार बदलो की प्रत्येक पूर्व पद अपने से पहले अनुपात के उत्तर पद के समान रहे ।

∴ अ : ब : स : द = ३ : ४ : $\frac{२८}{५}$: $\frac{६३}{१०}$ = ३० : ४० : ५६ : ६३

उत्तर

नियम :—प्रत्येक अनुपात के पदों को (प्रथम को छोड़कर) उसके पूर्व पद से भाग दो और तत्पश्चात् इस प्रकार प्राप्त पदों को पिछले अनुपात के उत्तर पद से गुणा करो ।

(४०) यदि अ, ब, तथा स तीन संख्यायें अ : ब = ४ : ५ तथा ब : स = ६ : ७ के अनुपात में हों, तो उनका विततानुपात ज्ञात करो ।

(४१) यदि अ ४ रु० तो ब ५ रु० कमाता है और यदि ब, ६ रु० तो स ७ रु० कमाता है, और जब स ८ रु० तो द ९ रु० कमाता है, तो अ, ब, स, तथा द की आय की तुलना करो ।

(४२) यदि अ = ब का $\frac{१}{३}$, स = ब का $\frac{१}{४}$ तो अ और स का अनुपात ज्ञात करो।

नम्बर ८– (४३) ५५ गज कपड़े का मूल्य निकालो जबकि ३० गज कपड़े का मूल्य ६ रु० है।

क्रिया :—राशियाँ इस प्रकार प्रकट की जा सकती हैं :—

गज   गज

३०   :   ५५ : : ६ रु० : अभीष्ट मूल्य

$\therefore$ अभीष्ट मूल्य $= \frac{५५ \times ६}{३०} =$ ११ रु०   उत्तर

(४४) यदि २७ मन २० सेर शक्कर का मूल्य ३४६ रु० ८ आ० हो, तो २०४ रु० १२ आ० में कितनी शक्कर खरीदी जा सकती है ?

(४५) किसी दिवालिए को २०,००० रु० की देनदारी है। यदि उसकी जायदाद का मूल्य ७५०० रु० हो, तो बताओ वह रुपये में क्या भुगतान कर सकता है।

(४६) यदि १५० मील के लिए ३२ मन बोझ का भाड़ा ५२ रु० हो, तो बताओ कि उतनी ही दूर तथा उसी दर पर ३५ रु० १२ आ० में कितने बोझ का बंडल ले जाया जा सकता है।

नम्बर ९–(४७) किसी काम को ५ आदमी २४ दिन में समाप्त कर सकते हैं तो १५ दिन में उस काम को पूर्ण करने के लिए कितने मनुष्य लगाये जायँ ?

क्रिया :—यह प्रश्न विलोमानुपात का उदाहरण है।

$\therefore$ राशियाँ इस प्रकार प्रकट की जा सकती हैं :—

दिन   दिन   मनुष्य

१५   :   २४   : :   ५ : मनुष्यों की अभीष्ट संख्या

मनुष्यों की अभीष्ट संख्या $= \frac{२४ \times ५}{१५} =$ ८   उत्तर

(३३) ८३२ : १२२ :: [ ] : २४४० (३४) $\frac{२}{९} : \frac{१}{४} :: \frac{३}{८} : [\ ]$।

(३५) ३ : ५ का वर्गानुपात ज्ञात करो।

(३६) २२५ : ३२४ का वर्गमूलानुपात ज्ञात करो।

(३७) ६ ::११ का घनानुपात ज्ञात करो।

(३८) १३३१ : १७२८ का घनमूलानुपात निकालो।

खंड ख—नम्बर ७–(३९) यदि अ : ब इसी प्रकार हों जैसे कि ३ : ४ ब:स इसी प्रकार हों जैसे ५:७ तथा स : द वैसे ही जैसे कि ८ : ९ हों, तो अ ब स तथा द का विततानुपात ज्ञात करो।

क्रिया :—

$$अ : ब = ३ : ४$$

$$ब : स = ५ : ७ = १ : \frac{७}{५} = ४ : \frac{२८}{५}$$

$$स : द = ८ : ९ = १ : \frac{९}{८} = \frac{२८}{५} : \frac{६३}{१०}$$

टीका : अनुपात के पदों को इस प्रकार बदलो की प्रत्येक पूर्व पद अपने से पहले अनुपात के उत्तर पद के समान रहे।

$$\therefore अ : ब : स : द = ३ : ४ : \frac{२८}{५} : \frac{६३}{१०} = ३० : ४० : ५६ : ६३$$

उत्तर

नियम :—प्रत्येक अनुपात के पदों को (प्रथम को छोड़कर) उसके पूर्व पद से भाग दो और तत्पश्चात् इस प्रकार प्राप्त पदों को पिछले अनुपात के उत्तर पद से गुणा करो।

(४०) यदि अ, ब, तथा स तीन संख्यायें अ : ब = ४ : ५ तथा ब : स = ६ : ७ के अनुपात में हों, तो उनका विततानुपात ज्ञात करो।

(४१) यदि अ ४ रु० तो ब ५ रु० कमाता है और यदि ब, ६ रु० तो स ७ रु० कमाता है, और जब स ८ रु० तो द ९ रु० कमाता है, तो अ, ब, स, तथा द की आय की तुलना करो।

(४२) यदि अ = ब का $\frac{१}{३}$, स = ब का $\frac{१}{४}$ तो अ और स का अनुपात ज्ञात करो।

नम्बर ८– (४३) ५५ गज कपड़े का मूल्य निकालो जबकि ३० गज कपड़े का मूल्य ६ रु० है।

क्रिया :—राशियाँ इस प्रकार प्रकट की जा सकती हैं :—

गज		गज			
३०	:	५५	: :	६ रु०	: अभीष्ट मूल्य

$$\therefore \text{अभीष्ट मूल्य} = \frac{५५ \times ६}{३०} = ११ \text{ रु०}$$ उत्तर

(४४) यदि २७ मन २० सेर शक्कर का मूल्य ३४६ रु० ८ आ० हो, तो २०४ रु० १२ आ० में कितनी शक्कर खरीदी जा सकती है ?

(४५) किसी दिवालिए को २०,००० रु० की देनदारी है। यदि उसकी जायदाद का मूल्य ७५०० रु० हो, तो बताओ वह रुपये में क्या भुगतान कर सकता है।

(४६) यदि १५० मील के लिए ३२ मन बोझ का भाड़ा ५२ रु० हो, तो बताओ कि उतनी ही दूर तथा उसी दर पर ३५ रु० १२ आ० में कितने बोझ का बंडल ले जाया जा सकता है।

नम्बर ९–(४७) किसी काम को ५ आदमी २४ दिन में समाप्त कर सकते हैं तो १५ दिन में उस काम को पूर्ण करने के लिए कितने मनुष्य लगाये जायँ ?

क्रिया :—यह प्रश्न विलोमानुपात का उदाहरण है।

∴ राशियाँ इस प्रकार प्रकट की जा सकती हैं :—

दिन		दिन		मनुष्य	
१५	:	२४	: :	५	: मनुष्यों की अभीष्ट संख्या

$$\text{मनुष्यों की अभीष्ट संख्या} = \frac{२४ \times ५}{१५} = ८$$ उत्तर

परिभाषा :—विलोम त्रैराशिक उसे कहते हैं जिसमें कि कोई बड़ी संख्या छोटा उत्तर और छोटी संख्या बड़ा उत्तर चाहती है। उक्त उदाहरण इसी नियम का है।

सूचना :—विलोमानुपात में अनुपात के पूर्व पद को उत्तर पद के स्थान पर और उत्तर पद को पूर्व पद के स्थान पर रखो।

(४८) जिस काम को १२ आदमी २० दिन में करते हैं, उसे ८ दिन में समाप्त करने के लिए कितने आदमियों की आवश्यकता होगी ?

(४९) यदि ३२ व्यक्ति किसी काम को २५ दिन में ४०० रु० लेकर समाप्त कर सकते हैं, तो २० व्यक्ति उसे कितने समय में समाप्त कर देंगे ?

(५०) यदि मैं अपने किसी मित्र को ३२५० रु० ६ मास के लिए उधार दूँ तो उसको १५०० रु० मुझे कितने काल के लिए उधार देना चाहिये।

खंड ग—नम्बर १०— (५१) दो दाँतेदार पहिये जिनमें कि एक के १२ और दूसरे के १६ दाँते हैं, एक दूसरे से रगड़ कर चलते हैं, तो बताओ कि यदि उनमें दूसरा ३० सेकेंड में ६० बार घूमता है तो पहला ६ सेकेंड में कितनी बार घूमेगा।

क्रिया :—घूमने की संख्या दो भिन्न अनुपातों पर निर्भर है, प्रथम दाँतों के तथा दूसरे सेकेंडों के, जिससे कि हमको सरल समानुपात में दो समस्यायें उपस्थित होती हैं; जिनमें कि प्रथम विलोमानुपात तथा दूसरी अनुलोमानुपात की है। राशियाँ इस प्रकार प्रकट की जा सकती हैं।

दाँते	१२ : १६	चक्कर	(१) थोड़े दाँते, अधिक चक्कर
सेकेंड	३० : ६	: : ६० : क	(२) कम समय, कम चक्कर

दाँते तथा सेकंड का मिश्रित समानुपात

= १२ × ३० : १६ × ६

∴ १२ × ३० : १६ × ६ : : ६० : क

किन्तु बाह्य पदों का गुणनफल, मध्य पदों के गुणनफल के समान होता है;

$$\therefore \text{क} \times १२ \times ३० = १६ \times ६ \times ६०$$

$$\therefore \text{क} = \frac{१६ \times ६ \times ६०}{१२ \times ३०} = १६$$

∴ चक्करों की अभीष्ट संख्या = १६ **उत्तर**

(५२) १० तथा ४८ दाँते वाले दो पहिये एक दूसरे से रगड़ खाते हैं। यदि इनमें पहिला $\frac{१}{३}$ मिनट में ३२ चक्कर करता है तो बताओ कि दूसरा १२० सेकेंड में कितनी बार घूमेगा ?

(५३) यदि २० तख्ते की ३००० पुस्तकों के लिए १२५ रिम कागज की आवश्यकता है, तो बताओ कि १३$\frac{१}{२}$ तख्ते की १०,००० पुस्तकों में कितना कागज लगेगा ?

(५४) यदि २५ गैस लैम्प २० दिन तक ५ घन्टे के लिए प्रति सन्ध्या जलाए जायँ, तो उनमें २१ रु० ४ आ० की गैस खर्च होती है। बताओ कि ३० दिन तक ४ घन्टे प्रति सन्ध्या ७६ रु० ८ आ० में कितने लैंप जलाए जा सकते हैं।

(५५) यदि ३ पुरुष, ४ स्त्री और ५ बच्चे ६ एकड़ २ रूड खेत ६ दिन में १० घन्टे प्रतिदिन काम करके काट सकते हैं तो ७ पुरुष ६ स्त्री और ११ बच्चे १२ घन्टे प्रतिदिन काम करके १४ एकड़ १ रूड खेत को कितने समय में काट सकेंगे। यदि माना जाये कि पुरुष, स्त्री तथा एक बालक की काम करने की शक्ति ३ : २ : १ के अनुपात में है।

संकेतः—(क) १ आदमी = ३ बच्चे, १ स्त्री = २ बच्चे
२ आदमी = ३ स्त्री, (काम करने की शक्ति में)

(ख). ∴ ३ आदमी + ४ स्त्री + ५ बच्चे = (६ + ८ + ५) = २२ बच्चे

सूचनाः—ऐसे प्रश्नों में पुरुष स्त्री अथवा बच्चों में से किन्हीं दो को तीसरे की प्रकार में बदल लेना चाहिये।

(५६) किसी जहाज में २२ औंस प्रति व्यक्ति प्रति दिन की दर से २७ आदमियों के लिए ९० दिन की खाद्य-सामग्री है। २७ दिन बाद जहाज को खराब मौसम होने के कारण कहीं १४ दिन के लिए लंगर डालना पड़ा जिसके बाद दुर्भाग्यवश ३ व्यक्ति मर गये। तो बताओ कि इस घटना के पश्चात् सामग्री को किस प्रकार बाँटा जाय कि वह शेष समय के लिए पर्याप्त हो जाय।

संकेत :—वास्तव में शेष सामग्री २७ व्यक्तियों के लिए

[९०—(२७+१४)] दिन या, ४९ दिन के लिए पर्याप्त होगी।

किन्तु प्रश्न की शर्त के अनुसार वह (२७—३) या २४ व्यक्तियों के लिए (४९+फालतू समय) या, (४९+१४) या ६३ दिन तक रहनी चाहिए।

(५७) किसी काम को ३६ दिन में समाप्त करने के लिए १५ व्यक्ति ९ घन्टे प्रतिदिन काम करते हैं, किन्तु २४ दिन के पश्चात् ज्ञात होता है कि उसमें केवल $\frac{३}{५}$ काम हुआ है। तो बताओ कि यदि उन काम करने वालों में ३ व्यक्ति और बढ़ा दिये जायँ तो सबको मिलाकर उसी समय में काम समाप्त करने के लिए कितने घन्टे प्रतिदिन काम करना होगा।

(५८) किसी खेत को काटने के लिए ४ आदमी लगाए गए, किन्तु बाद में ज्ञात हुआ कि ५ दिन में उन्होंने केवल १० एकड़ खेत काटा। यदि २ आदमी और जुटा देने पर काम ३ दिन और अधिक लेकर समाप्त हुआ तो बताओ खेत का क्षेत्रफल क्या था।

(५९) ८ आदमी या १२ लड़के ९ घन्टे रोजाना काम करके १५ बीघे खेत १० दिन में काट सकते हैं, तो बताओ कि ६ आदमियों के साथ कितने लड़के लगा दिए जायँ कि ५ घन्टे रोजाना काम करके १० बीघे खेत को ४ दिन में काट सकें।

(९०) किसी ठेकेदार ने २०० दिन के वादे के काम पर ५० आदमी लगाये, किन्तु ज्ञात हुआ कि इस समय के $\frac{२}{५}$ में वह $\frac{१}{३}$ ही काम निबटा सके। तो बताओ कि उसे वादे के भीतर ही निबटाने के लिए कितने और आदमियों की आवश्यकता होगी, जब कि पहले आदमी १० घन्टे तथा बाद में लगाए हुए १२ घन्टे रोजाना काम करते हैं।

नम्बर ११ – (९१) एक मजदूरों के समूह ने ९ दिन में एक कुँआ खोदने का वादा किया, किन्तु उनमें से ६ के अनुपस्थित रहने के कारण शेष व्यक्ति काम को १५ दिन में कर सके। तो बताओ कि काम पर पहले कितने व्यक्ति लगाए गए थे।

क्रिया :—पहले आदमियों की संख्या : (पहले आदमियों की संख्या —६) : : १५ : ९

∴ पहले आदमियों की संख्या × ९

= १५ × (पहले आदमियों की संख्या—६)

= १५ × पहले आदमियों की संख्या—९०

पक्षान्तरानयन से

१५ × पहले आदमियों की संख्या—९ × पहले आदमियों की संख्या = ९०

∴ ६ × पहले आदमियों की संख्या = ९०

∴ पहले आदमियों की संख्या = $\frac{९०}{६}$ = १५ उत्तर

(९२) कुछ राजों ने एक मकान को ८ महीने में बनाने का वादा किया किन्तु उनमें से १० के अनुपस्थित हो जाने से शेष उसे १० मास में तैयार कर सके, तो बताओ कि काम पर कुल कितने राज लगाए गए।

नम्बर १२—(९३) यदि १२ आदमी और १६ लड़के एक काम को ५ दिन में कर सकते हैं और १३ आदमी और २४ लड़के उसी काम को ४ दिन में

कर सकते हैं, तो ७ आदमी और १० लड़के उसे करने में कितना समय लेंगे ?

क्रिया :—१२ आदमी + १६ लड़के एक काम को ५ दिन में कर सकते हैं।

∴ ५ × (१२ आदमी + १६ लड़के) काम को ५/५ या १ दिन में कर सकते हैं।

[अधिक लड़के और आदमी, कम समय]

∴ ६० आदमी + ८० लड़के काम को १ दिन में कर सकते हैं (क)

फिर १३ आदमी + २४ लड़के उसी काम को ४ दिन में कर सकते हैं।

∴ ४ × (१३ आदमी + २४ लड़के) उसी काम को ४/४ या १ दिन में कर सकते हैं।

∴ ५२ आदमी + ९६ लड़के उस काम को १ दिन में कर सकते हैं। (ख)

क्योंकि (क) तथा (ख) फल के अनुसार लड़के तथा आदमियों का कोई समूह काम को १ दिन में समाप्त कर सकता है, इसलिए काम करने के दृष्टिकोण से,

६० आदमी + ८० लड़के = ५२ आदमी + ९६ लड़के

या, ६० आदमी—५२ आदमी = ९६ लड़के—८० लड़के

या, ८ आदमी = १६ लड़के

∴ १ आदमी = २ लड़के

∴ १२ आदमी + १६ लड़के = (२४ + १६) लड़के = ४० लड़के

तथा ७ आदमी + १० लड़के = (१४ + १०) लड़के = २४ लड़के।

अब प्रश्न यह है कि, यदि ४० लड़के एक काम को ५ दिन में समाप्त कर सकते हैं तो २४ लड़के उसे करने में कितना समय लेंगे ?

लड़के		लड़के		दिन		दिन
२४	:	४०	: :	५	:	य

$\therefore$ २४ य $= ४० \times ५$

$\therefore$ य $= \frac{४० \times ५}{२४} = \frac{२५}{३} = ८\frac{१}{३}$

$\therefore$ अभीष्ट समय $= ८\frac{१}{३}$ दिन उत्तर

(६३) यदि दो लड़के और एक आदमी किसी काम को ४ घन्टे तथा एक लड़का और दो आदमी उसी काम को तीन घन्टे में कर सकते हैं, तो बताओ कि उसी काम को एक आदमी और एक लड़का पृथक्-पृथक्, तथा एक साथ कितने समय में कर लेंगे।

(६४) किसी काम को तीन आदमी और ४ लड़के ६ दिन में करते हैं; ३ आदमी और १ लड़का ८ दिन में करते हैं; और ४ स्त्री तथा ८ लड़के ५ दिन में करते हैं, तो बताओ कि एक स्त्री अकेले उस काम को कितने समय में कर लेगी।

(६५) यदि ५० आदमी ८ घन्टे प्रतिदिन काम करके एक काम १२ दिन में करते हैं, तो ६० आदमी उससे दूने काम को कितने घन्टे प्रतिदिन काम करके १६ दिन में करेंगे ? (उ० प्र०, १९३७)

(६६) ३ आदमी ५ स्त्रियों के बराबर और २ आदमी ३ लड़कों के बराबर कार्य करते हैं। १३ आदमियों का ६ दिन का, ८ स्त्रियों का ५ दिन का और ५ लड़कों का ४ दिन का वेतन ६८ रुपये १२ आना है तो एक आदमी, एक स्त्री और एक लड़के की प्रतिदिन की मजदूरी ज्ञात करो ? (उ० प्र०, १९३९)

(६७) एक काम पर ४ आदमी और ५ लड़के लगाये गये जिन्होंने आधा

काम ६ दिन में किया इसके पश्चात् १ आदमी और २ लड़के और बढ़ा दिये गये और फिर $\frac{१}{३}$ काम ३ दिन में हुआ तो कितने आदमी और बढ़ा दिये जायें कि काम एक दिन में समाप्त हो जाय ? (उ० प्र०, १९४१)

दसवाँ अध्याय

समानुपाती भागों में विभाजन

समानुपाती भागों में विभाजन—

यह वह क्रिया है जिसके द्वारा एक दी हुई राशि को इस प्रकार विभाजित किया जाता है जिससे कि वह किन्हीं दी हुई संख्याओं के अनुपात में हो। वस्तुतः यह त्रैराशिक की एक विधि है।

प्रश्नावली १०

खंड क—नम्बर १—(१) ८०० रुपये अ, ब, स में इस प्रकार बाँटो कि उनका प्राप्त धन क्रमशः ५, ७ और १३ के अनुपात में हो।

क्रिया—समानुपाती भागों का जोड़ $= ५ + ७ + १३ = २५$

इस कारण ८०० रु० का कुल धन २५ समान भागों में विभाजित होना है, जिनमें से कि अ को ५ ब को ७ तथा स को १३ भाग मिलने चाहिए।

∵ २५ भाग = ८०० रु०

∴ १ भाग = $\frac{८००}{२५}$ = ३२ रु०

∴ अ का भाग जो ५ भागों का है = (३२ × ५) = १६० रु०
ब का भाग जो ७ भागों का है = (३२ × ७) = २२४ रु०
स का भाग जो १३ भागों का है = (३२ × १३) = ४१६ रु०

उत्तर

नियमः—(१) समानुपाती भागों का योगफल ज्ञात करो।

(२) दी हुई संख्या को भागों के योगफल से भाग दो।

(३) इस प्रकार प्राप्त भागफल को अनुपात की प्रत्येक राशि से गुणा करो-ऐसा करने पर प्राप्त गुणनफल ही अभीष्ट भाग होंगे।

(२) ७२० रु० तीन आदमियों में इस प्रकार विभाजित करो कि उनके भाग क्रमशः ३, ७ तथा १४ के अनुपात में हों।

(३) २४२० पौं० को ३ व्यक्तियों में ऐसे बाँटो कि उनके भाग ५, ८ तथा ९ के अनुपात में हों।

(४) ४ मन १५ सेर ८ छ० को ३$\frac{१}{३}$, ४ तथा ५$\frac{२}{३}$ के अनुपात में ३ भागों में विभाजित करो।

संकेतः—३$\frac{१}{३}$, ४, ५$\frac{२}{३}$ में से प्रत्येक भिन्न को ३ से जो कि उनके हरों का ल० स० है गुणा करो, तब यह भाग (३$\frac{१}{३}$ × ३), (४ × ३) तथा (५$\frac{२}{३}$ × ३) या १०, १२ और १७ के अनुपात में होंगे।

(५) ४६६ पौं० १३ शि० ४ पें० को $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{६}$, तथा $\frac{१}{८}$ के अनुपात में विभाजित करो।

(६) यदि किसी त्रिभुज के ३ कोणों का मान ३ : ५ : १ के अनुपात में हो तो प्रत्येक कोण कितने अंश का होगा ?

संकेतः—त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल १८०° के बराबर होता है।

(७) २८० को ऐसे दो भागों में विभाजित करो कि उनमें एक दूसरे का $\frac{५}{९}$ हो।

नम्बर २—(८) कोई धन ३$\frac{३}{४}$, ४ और ५·५ के अनुपात में बाँटा गया और उसका छोटा भाग ३० रु० था, तो बताओ कुल धन कितना था।

क्रियाः—भागों का अनुपात = ३$\frac{३}{४}$: ४ : ५·५ = $\frac{१५}{४}$: ४ : $\frac{११}{२}$

= १५: १६ : २२

समानुपाती भागों का योगफल = १५ + १६ + २२ = ५३

विभाजित होने वाले धन का $\frac{१५}{५३}$ = ३० रु०

∴ कुल धन = ३० का $\frac{५३}{१५}$ = १०६ रु० उत्तर।

(६) कोई धन २·१, २·५ तथा ३·२ के अनुपात में विभाजित किया गया। यदि उसका सबसे छोटा भाग १० रु० ८ आ० हो तो बताओ कि विभाजित धन कितना था।

(१०) किसी लड़ाई में एक फौज में प्रति २५ आदमी के पीछे २ मरे तथा ४ घायल हुए और ३८,००० आदमी ठीक बच गये। तो बताओ कि उस फौज में कुल आदमी कितने थे।

नम्बर ३–(११) यदि बारूद बनाने के लिए ७६ भाग शोरा, १४ भाग कोयला, १० भाग गन्धक की आवश्यकता हो तो बताओ कि १ मन बारूद तैयार करने के लिए इनके कितने कितने भाग की आवश्यकता होगी ?

क्रिया:—शोरे, कोयले और गन्धक का अनुपात

= ७६ : १४ : १० = ३८ : ७ : ५

समानुपाती भागों का योगफल = ३८ + ७ + ५ = ५०

५० भाग = १ मन या ४० सेर

∴ १ भाग = $\frac{४०}{५०}$ या $\frac{४}{५}$ सेर

∴ ३८ भाग शोरे का भार = ३८ × $\frac{४}{५}$ = ३० से० ६ छ० २ तो०

७ भाग कोयले का भार = ७ × $\frac{४}{५}$ = ५ सेर ९ छ० ३ तो०

और ५ भाग गन्धक का भार = ५ × $\frac{४}{५}$ = ४ सेर

} उत्तर

(१२) खोटी धातु के एक डले में १५ भाग सोना, ४ भाग चाँदी तथा ३ भाग ताँबा है। यदि उसी प्रकार की १८ हंड्रेडवेट धातु तैयार की जाये तो बताओ कि उक्त धातुओं के कितने-कितने भार की आवश्यकता होगी ?

(१३) यदि कंकरीट बनाने के लिये १$\frac{१}{२}$ भाग चूना, ४ भाग बजरी तथा २$\frac{१}{२}$ भाग रेत की आवश्यकता हो, तो ६$\frac{२}{३}$ टन कंकरीट में कितना चूना चाहिये ?

खंड ख–नम्बर ४–(१४) १३०० पौं० अ, ब, स, में इस प्रकार बाँटो कि ब को अ का तिगुना और स को ब का तिगुना प्राप्त हो।

क्रियाः—माना कि अ का भाग १ है,

∴ ब का भाग जो अ के भाग का तिगुना है = ३

और स का भाग जो ब के भाग का तिगुना है = ९

इसलिए अ, ब, स के भागों का अनुपात = १ : ३ : ९

समानुपाती भागों का योगफल = १ + ३ + ९ = १३

∵ १३ भाग = १३०० पौं०

∴ १ भाग = $\frac{१३००}{१३}$ या १०० पौं०

∴ अ का भाग = १०० पौं०

∴ ३ भाग के बराबर ब का भाग = (१०० × ३) = ३०० पौं०

∴ ९ भाग के बराबर स का भाग = (१०० × ९) = ९०० पौं०

उत्तर

(१५) ११०० रु० अ, ब, स में इस प्रकार बाँटो कि अ को ब का दूना, और ब को स का तिगुना प्राप्त हो।

(१६) २८ रु० १० आ० ८ पा० को अ, ब, स में इस प्रकार बाँटो कि यदि अ को १ रु० मिले तो ब को १० रु० और स को १० रु० ८ आ० मिले।

(१७) ११२५ रु० अ, ब, स तथा द में इस प्रकार बाँटो कि अ को ब का दूना, स का तिगुना और द का चौगुना प्राप्त हो।

नम्बर ५–(१८) ७०० रु० को बराबर अठन्नी, चवन्नी व दुवन्नी में विभाजित करो।

क्रिया:—एक अठन्नी, एक चवन्नी व एक दुवन्नी की एक ढेरी का मान

$$= (\frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८}) \text{ रु०} = \frac{७}{८} \text{ रु०}$$

अब प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या = उक्त प्रकार की ढेरियों की संख्या के।

किन्तु ढेरियों की संख्या = ७०० ÷ $\frac{७}{८}$ = $\frac{७०० \times ८}{७}$ = ८००

प्रत्येक प्रकार के सिक्के की संख्या = ८०० उत्तर।

(१६) किसी रुपये, अठन्नी, चवन्नी, दुवन्नी, तथा इकन्नी के ढेर का मान ६६८ रु० १२ आ० है। जब कि प्रत्येक की संख्या बराबर है तो उस ढेरी में सिक्कों की संख्या ज्ञात करो।

(२०) किसी थैले में अर्द्ध सावरन, क्राउन तथा फ्लोरिन के सिक्के हैं, जिनका अनुपात ३, ७ तथा ६ है। यदि कुल सिक्कों का मान २६ पौंड १ शिं० हो तो उनमें प्रत्येक सिक्के की संख्या बताओ।

(२१) २०० सिक्कों के १ ढेर में गिन्नी, अर्द्धसावरन तथा अर्द्ध-क्राउन सम्मिलित हैं और उनके मूल्य का पारस्परिक अनुपात १४ : ८ : ३ है, तो बताओ कि ढेरी में गिन्नी की संख्या कितनी है।

नम्बर ६—(२२) २४० रु० को अ और ब में इस प्रकार बाँटो कि अ को ब से २० रु० अधिक प्राप्त हो।

क्रिया :—यदि अ के भाग में से २० रु० कम कर दिये जायँ तो वह ब के भाग के बराबर होगा। संक्षेप में ब का भाग जो कुछ उस समय उनके पास है, उसका आधा होगा। किन्तु यह स्पष्ट है कि जब अ के भाग से २० रु० कम हो जाते हैं तो अ और ब के पास २२० रु० रहते हैं। इस कारण ब का मान ११० रु० है और अ का यथार्थ भाग (११० + २०) रु० या १३० रु० है।

सूचना:—उक्त प्रकार के प्रश्नों में प्रत्येक भाग की अधिकता उसके पूर्व के भाग पर ज्ञात कर लेने के पश्चात् विभाजित किये जाने वाले धन में से घटा देना चाहिये और उसके बाद शेष को व्यक्तियों में बराबर बाँट देना चाहिये।

(२३) १४० रु० अ, ब, स में इस प्रकार बाँटो कि अ को ब से ५ रु० अधिक तथा स से १० रु० कम प्राप्त हों।

(२४) २०८० रु० अ, ब, और स में इस प्रकार बाँटो कि अ को ब और स दोनों से २०० रु० अधिक तथा स को ब के अर्द्ध भाग से २०० रु० अधिक प्राप्त हों।

संकेत—२०० रु० जो कि अ के भाग में ब और स के भाग से अधिक है, २०८० रु० में से घटाओ और शेष को एक ओर अ तथा दूसरी ओर ब और स (एक साथ) सम्मिलित में बराबर-बराबर बाँट दो।

(२५) ३८७२ रु० हरी, मोहन तथा सोहन में इस प्रकार विभाजित करो कि यदि उनके भाग में क्रमशः ६, १० और १२ रु० बढ़ाए जायँ, तो वह ४ : ५ : ६ के अनुपात में हों।

संकेतः—हरी, मोहन तथा सोहन के भाग जब उन्हें क्रमशः ६, १०, १२ रु० और दिये जायँ तो (३८७२+२८) रु० या ३६०० रु० के धन में ४ : ५ : ६ के अनुपात में होंगे।

खंड ग–नम्बर ७–(२६) किसी कारखाने में पुरुष स्त्री और बच्चे १ : २ : ३ के अनुपात में नौकर हैं और उनकी आय ६ : ३ : २ के अनुपात में है। यदि कुल कारखाने में ५० पुरुष काम करते हों और सब नौकरों की आय ४५० रु० हो तो एक स्त्री, एक पुरुष तथा एक बच्चे का पृथक्-पृथक् साप्ताहिक वेतन बताओ।

सूचना :—यदि किसी संख्या को एक साथ ४ : ५ : ६ तथा २ : ३ : ४ के अनुपात में बाँटना हो तो वह (४×२) : (५×३) : (६×४) या ८ : १५ : २४ के अनुपात में विभाजित होगी।

क्रिया :—माना कि एक पुरुष का वेतन = ६ रु०

तो १ स्त्री ,, ,, = ३ रु०

तथा १ बच्चे ,, ,, = २ रु०

और क्योंकि पुरुष, स्त्री तथा बच्चे १ : २ : ३ के अनुपात में हैं इसलिये अब पुरुष, स्त्री और बच्चों का वेतन (६×१) : (३×२) : (२×३) या ६ : ६ : ६ के अनुपात में होगा।

अब समानुपाती भागों का योगफल = ६ + ६ + ६ = १८

∵ पुरुषों का वेतन = ४५० रु० का $\frac{६}{१८}$ = १५० रु०

किन्तु पुरुषों की संख्या = ५०

∴ एक पुरुष का वेतन = ३ रु०

∴ एक स्त्री का वेतन = १ रु० ८ आ०

एक बच्चे का वेतन = १ रु०

} उत्तर

(२७) किसी कारखाने में पुरुष, स्त्री तथा बच्चे ३ : ४ : ५ के अनुपात में नौकर हैं। यदि एक पुरुष को एक स्त्री के ३ पौंड के पीछे और बच्चे के १ पौंड के पीछे ४ पौंड मिलते हैं तो ३ पौं० ५ शि० ३ पें० में से प्रत्येक का भाग बताओ।

(२८) १४५७६ रु० ७ आ० को २ आदमी, ३ औरत और ५ बच्चों में इस तरह बाँटो कि प्रत्येक औरत को प्रत्येक बच्चे के भाग का दूना और प्रत्येक आदमी को एक औरत तथा एक बच्चे के भाग के बराबर धन प्राप्त हो।

(२६) १७७ पौं० १५ पुरुष, २० स्त्री तथा ३० बच्चों में बाँटे जाते हैं तो बताओ कि यदि ५ पुरुष ७ स्त्रियों के और ३ स्त्री ५ बच्चों के बराबर धन पाती हों तो उनमें से प्रत्येक को क्या मिलेगा।

(३०) यदि पहली, दूसरी और तीसरी श्रेणी का किराया प्रति मील २$\frac{३}{४}$ पैं०, १$\frac{३}{४}$ पैं० और १ पैं० है और गाड़ी में प्रत्येक ४७ तीसरी श्रेणी के यात्रियों तथा प्रत्येक ३ दूसरी श्रेणी के यात्रियों के पीछे ५ पहली श्रेणी के यात्री सफर करते हों तो बताओ कि ५३६७४ पौं० १६ शि० में प्रत्येक श्रेणी के यात्रियों ने जिन्होंने पैरिस से कैले तक की यात्रा की, क्या दिया होगा।

(३१) २ : ३ : ४ के अनुपात में १६ रु० ८ आ० राम, सोहन और मोहन को बाँटने का विचार किया गया, किन्तु त्रुटि के कारण भाजन व्युत्क्रमानुपात में कर दिया गया तो बताओ कि प्रत्येक को इस त्रुटि के कारण कितनी हानि या लाभ रहा।

नम्बर ८—(३२) एक परीक्षार्थी हाईस्कूल परीक्षा में अंग्रेजी, गणित, इतिहास, बँगला तथा संस्कृत विषय में सम्मिलित हुआ, और विभिन्न विषयों में उसने ३ : ४ : ७ : ६ : ५ के अनुपात में क्रमशः अंक पाए, किन्तु प्रत्येक विषय के अधिकाधिक अंक १०० थे, और उसने कुल जोड़ के $\frac{२}{५}$ अंक प्राप्त किये। यदि दूसरी श्रेणी में पास होने के लिए ४५ प्रतिशत अंकों की आवश्यकता हो तो बताओ कि उसने किस-किस विषय में दूसरी श्रेणी प्राप्त की।

क्रिया :—कुल विषयों के अधिकाधिक अंक = ५००

परीक्षार्थी के प्राप्त अंक = ५०० का $\frac{२}{५}$ = २००

परन्तु २०० अंक विभिन्न विषयों में ३ : ४ : ७ : ६ : ५ के अनुपात में विभाजित होने हैं।

समानुपाती भागों का योगफल = ३ + ४ + ७ + ६ + ५ = २५

अँग्रेजी में प्राप्त अंकों की संख्या = २०० का $\frac{३}{२५}$ = २४

गणित ,, ,, = २०० का $\frac{४}{२५}$ = ३२

इतिहास ,, ,, = २०० का $\frac{७}{२५}$ = ५६

बंगला ,, ,, = २०० का $\frac{६}{२५}$ = ४८

संस्कृत ,, ,, = २०० का $\frac{५}{२५}$ = ४०

किन्तु दूसरी श्रेणी के लिए ४५% की आवश्यकता है।

∴ उसने बँगला तथा इतिहास में ही दूसरी श्रेणी प्राप्त की।

उत्तर

(३३) किसी इंजीनियरिंग की परीक्षा में एक विद्यार्थी ने प्रत्येक १०० अंक के ६ पर्चे लिये और उनमें ५ : ८ : ७ : ६ : १० : ९ के अनुपात में अंक पाकर कुल योगफल के $\frac{३}{४}$ अंक पाये। तो बताओ कि यदि प्रथम श्रेणी के लिए ७५% अंकों की आवश्यकता हो तो उसने किस-किस विषय में प्रथम श्रेणी प्राप्त की।

मिश्रित :—(३४) १३८ रु० को ८ आदमियों, ६ औरतों और १० लड़कों में इस प्रकार बाँटो कि आदमी को औरत से १$\frac{१}{२}$ गुना और औरत को लड़के से दूना मिले।

(उ० प्र०, १९३५)

(३५) एक धन दो आदमियों में ३ : ५ के अनुपात में बाँटा गया। यदि एक आदमी को दूसरे से २० रु० कम मिले तो धन बताओ।

(उ० प्र०, १९३८)

(३६) दो धनों का योगफल ५४ पौंड १२ शिलिंग है, पहले में जितने पौंड हैं दूसरे में उतने ही शिलिंग हैं तो वे धन बताओ। (उ० प्र०, १९४६)

(३७) ५७६८ को २, ३, ४ और ५ के अनुपात में विभाजित करो।

(उ० प्र०, १९४७)

ग्यारहवाँ अध्याय

साझा

साझा वह रीति है जिसके द्वारा किसी व्यवहार में साझेदारों के हानि-लाभ उनके लगाए हुए धन के आधार पर निर्धारित किए जाते हैं।

साझा दो प्रकार का होता है:—

(१) सरल और (२) मिश्र

सरल साझा

सरल साझा वह है जिसमें साझेदारों का धन समान काल के लिए व्यवहार में लगा होता है तथा उनका लाभ या हानि भी उनके धन के अनुपात में होता है।

इस दशा में सभी साझेदारों का धन एक ही मान में प्रकट किया जाता है।

माना कि अ, ब, स तीन व्यक्ति किसी व्यवसाय में साझेदार हैं और अ ने उसमें १५०० रु०, ब ने २५०० रु० तथा स ने ३००० रु० लगा रखे हैं। यदि उन्हें अब ४२० रु० का लाभ हो तो वह किस प्रकार विभाजित किया जायेगा ?

यह स्पष्ट है कि लाभ १५००, २५०० तथा ३००० अथवा ३, ५ तथा ६ के अनुपात में विभाजित होना चाहिये, जो कि गत अध्याय के अनुसार किया जा सकता है।

सूचना :—किसी दिवालिये की पूँजी भी उसी रीति से उसको उधार देने वाले व्यक्तियों में बाँटी जा सकती है।

मिश्र साझा

मिश्र साझा वह है जिसमें कि साझेदारों का धन असमान काल के लिए व्यवसाय में लगाया जाता है। इस कारण इस दशा में उनका लाभ या हानि भी केवल लगाए हुए धन पर ही नहीं किन्तु जितने काल तक वह उसमें लगा रहता है, उसके अनुसार निश्चित किया जाता है तथा इस प्रकार वह जितने समय तक और जितना लगा रहता है, उसके गुणनफल के अनुपात में होता है।

(सभी साझेदारों का धन तथा समय एक ही मान में प्रकट किए जाते हैं।)

माना कि अ, ब, स किसी व्यवसाय में साझी हैं और अ ने ४ महीने के लिए १५०० रु०, ब ने ६ महीने के लिए २५०० रु० तथा स ने ७ महीने के लिए ३००० रु० लगा रखे हैं। यदि इस दशा में उनको २८०० रु० का लाभ हो तो वह किस प्रकार बिभाजित किया जाना चाहिए।

अब अ का १५०० रु० का धन ४ महीने में उतना ही लाभ प्राप्त करेगा जितना कि (१५००×४)=६००० रु० एक महीने में।

ब का २५०० रु० ६ महीने में उतना ही लाभ प्राप्त करेगा, जितना कि (२५००×६)=१५००० रु० एक महीने में।

स का ३००० रु० ७ महीने में उतना ही लाभ प्राप्त करेगा जितना कि (३०००×७)=२१००० रु० एक महीने में।

इस कारण लाभ ६०००, १५००० तथा २१००० या २, ५, ७ के अनुपात में विभाजित होना चाहिए जो कि गत अध्याय में वर्णित रीति के द्वारा हो सकता है।

प्रश्नावली ११

खंड क—नम्बर १—(१) तीन व्यक्ति साझे में कोई व्यवसाय करते हैं जिसमें अ ५०० रु०, ब ३०० रु० तथा स २०० रु० लगाते हैं। यदि उन्हें इसमें ८० रु० का लाभ हो तो प्रत्येक को क्या मिलेगा ?

क्रिया :—अ, ब, स का भाग = ५००, ३०० तथा २०० रु०।

लाभ उनके लगाए हुए धन के अनुपात ५ : ३ : २ में होना चाहिए।

समानुपाती भागों का योगफल = ५ + ३ + २ = १०

१० भाग = ८० रु०

∴ १ भाग = $\frac{८०}{१०}$ रु० = ८ रु०

∴ ५ भाग के बराबर अ का भाग = ४० रु०
३ भाग के बराबर ब का भाग = २४ रु०
तथा २ भाग के बराबर स का भाग = १६ रु०
} उत्तर

(२) अ, ब, स तीन साझेदार किसी काम में क्रमशः १८८०, ११२०, तथा १००० पौंड का धन लगाते हैं। यदि उसमें उन्हें ६०० पौंड का घाटा हो, तो प्रत्येक की हानि बताओ।

(३) अ, ब, स, द चार साझेदारों में, जिनका कि धन २$\frac{१}{२}$ आ०, ३$\frac{१}{२}$ आ०, ४ आ० तथा ६ आ० की पत्ती के हिसाब से किसी व्यवसाय में लगा है, २३४० रु० का लाभ किस प्रकार से बाँटा जायेगा ?

(४) अ, ब, स ने कोई व्यवसाय आरम्भ किया। अ ने उसमें स से २०० रु० अधिक लगाए और ब ने अ से ३०० रुपये अधिक, तथा स ने ६०० रु० लगाए जिससे १०८८ रु० का लाभ हुआ। तो बताओ कि प्रत्येक को क्या मिला।

(५) अ और ब ने एक चरागाह किराए पर ली और अ ने २० रु० देकर उसमें ३० भेड़ें रखीं। तो बताओ कि ब को जो उसमें ४८ भेड़ें रखता है क्या देना चाहिए।

नम्बर २—(६) तीन चरवाहे अ, ब और स एक घास का मैदान १७ रु० ८ आ० में किराए पर लेते हैं। अ उसमें १० बैल ७ मास तक, ब १२ बैल ५ मास तक तथा स १५ बैल ३ मास तक चराते हैं। तो बताओ कि उनमें से प्रत्येक को कितना किराया देना चाहिये।

क्रिया :—७ मास तक १० बैल चराने का व्यय उतना ही होगा जितना कि (१० × ७) बैल १ मास चराने का।

. १२ बैल ५ मास तक चराने का व्यय वही होगा जो कि (१२ × ५) बैल १ मास चराने का।

१५ बैल ३ मास तक चराने का व्यय वही होगा जो कि (१५ × ३) बैल १ मास चराने का।

∴ किराया ७० : ६० : ४५ तथा १४ : १२ : ९ के अनुपात में दिया जाना चाहिये।

समानुपाती भागों का योगफल $=$ १४ $+$ १२ $+$ ९ $=$ ३५

∴ ३५ भाग $=$ १७रु० ८ आ० $=$ ३$\frac{५}{२}$ रु०

∴ १ भाग $= \frac{३५}{२ \times ३५} = \frac{१}{२}$ रु०

१४ भाग के बराबर अ का भाग $=$ (१४ $\times \frac{१}{२}$) $=$ ७ रु०
१२ भाग के बराबर ब का भाग $=$ (१२ $\times \frac{१}{२}$) $=$ ६ रु०
९ भाग के बराबर स का भाग $=$ (९ $\times \frac{१}{२}$) $=$ ४ रु० ८ आ०
} उत्तर

(७) अ, ब और स ने एक चरागाह किराये पर ली और अ ने उसमें २० दिन तक ४० गायें, ब ने १५ दिन तक ३० गायें तथा स ने १५ दिन तक ५०

गायें रक्खीं। तो बताओ कि १०८ रु० किराये में प्रत्येक को कितना देना पड़ेगा।
(राजपूताना, १६३१)

(८) अ, ब, स किसी व्यवसाय में साझेदार होकर क्रमशः ५००० रु० ६ मास के लिये, ७००० रु० १ वर्ष के लिए तथा १२००० रु० ५ मास के लिए लगाते हैं। यदि उन्हें ७००० रु० की हानि हो तो प्रत्येक को कितना देना पड़ेगा ?

(६) अ, ब, और स एक खेत १८० रु० में किराये पर लेते हैं। अ उसमें २० घोड़े, ब १५ गायें और स १० भेड़ें रखता है। यदि घोड़े, गाय तथा भेड़ के रखने का खर्चा क्रमशः ३, २, १ के अनुपात में हो, तो उनमें से प्रत्येक को कितना किराया देना होगा ?

खंड ख—नम्बर ३—(१०) अ १६०० की पूँजी लगाकर कोई काम शुरू करता है, और ४ महीने के बाद वह ब को साझी कर लेता है। तो बताओ कि वह कितना धन लगाये कि वर्ष के अन्त में दोनों को बराबर लाभ हो।

क्रिया :—लाभ समय तथा पूँजी के गुणनफल का समानुपाती होता है, किन्तु इस दशा में दोनों व्यक्तियों के लाभ समान हैं, इस कारण अ और ब की पूँजी भी समान होनी चाहिए।

$\therefore$ १६०० रु० $\times$ १२ = ब की पूँजी $\times$ ८

$$\therefore \text{ब की पूँजी} = \frac{१६०० \times १२}{८} = २४०० \text{ रु०} \qquad \text{उत्तर}$$

(११) १ दिसम्बर १६२६ से अकबर ने २५०० पौंड की पूँजी से कोई काम शुरू किया जिसमें ८ महीने बाद हामिद भी शामिल हो गया। यदि वह वर्ष के अन्त में लाभ के समान भागी हों, तो हामिद की पूँजी बतलाओ।

(१२) १७०० रु० का धन लेकर अ कोई व्यापार करता है, जिसमें क्रमशः ३ और ६ महीने बाद ब तथा स भी सम्मिलित हो जाते हैं। यदि वर्ष समाप्त होने पर उनके लाभ का बँटवारा २: ३: ५ के अनुपात में हो तो बताओ ब और स ने उसमें कितनी-कितनी पूँजी लगाई।

नम्बर ४—(१३) हरी और प्रेम किसी कम्पनी में साझी हैं जिसमें हरी १० मास तक कुल धन का $\frac{२}{३}$ लगाता है किन्तु लाभ का $\frac{१}{५}$ प्रेम प्राप्त करता है, तो बताओ कि प्रेम का धन कितने काल तक लगा रहा।

क्रिया :—१ मास तक १ रु० इकाई मानो।

हरी और प्रेम की पूँजी का अनुपात $= \frac{२}{३} : \frac{१}{३}$ या २ : १

तथा उनके लाभ का अनुपात $= \frac{४}{५} : \frac{१}{५}$ या ४ : १.

हरी और प्रेम के अपनी-अपनी पूँजी लगाये रखने के समय का अनुपात = १० : क (जबकि क प्रेम की पूँजी लगाये रखने का समय है।)

किन्तु लाभ पूँजी और उसके लगे रहने के समय के गुणनफल का समानुपाती होता है।

$\therefore$ (२×१०) : (१×क) : : ४ : १.

किन्तु बाह्य पदों का गुणनफल मध्य पदों के गुणनफल के समान होता है;

$\therefore$ १×क×४ = २×१०×१

$$क = \frac{२ \times १० \times १}{१ \times ४} = ५$$

$\therefore$ प्रेम का धन ५ मास तक लगा रहा। **उत्तर**

(१४) अ और ब ने ६० दिन के लिये कोई चरागाह किराए पर ली, और अ ने ४० दिन तक उसमें ६० गायें रखीं किन्तु ब ने अ से ड्योढ़ा किराया दिया। तो बताओ कि ब ने शेष समय उसके अन्दर कितनी गायें रखीं।

(१५) ३ : ५ के अनुपात में धन लेकर राम और कृष्ण ने कोई काम शुरू किया किन्तु राम ने ७ माह पश्चात् अपनी पूँजी निकाल ली। यदि उन्होंने लाभ का बटवारा ७ : १० के अनुपात में किया हो, तो बताओ कि कृष्ण का धन कितने समय तक काम में लगा रहा।

(१६) ३ वर्ष ४ महीने के लिए अ और ब ने १२० पौं० में कोई चरागाह ली जिसमें कि कुछ समय तक अ ने ६० बैल रखकर ८० पौं० दे दिये तथा ब ने शेष समय तक ४५ बैल रखकर शेष धन चुका दिया। तो बताओ कि अ ने चरागाह का कितने समय तक प्रयोग किया।

(१७) १ जनवरी से क और ख ने किसी काम में साझा किया और क ने ८ मास तक उसमें १२५०० रु० लगे रहने दिए तथा ख ने अगले ४ मास में कुछ धन लगाया है। यदि वर्ष के अन्त में ७२६० रु० के लाभ में ख ने ३२४० रु० प्राप्त किए हों तो बताओ उसने कितनी पूँजी लगाई थी।

(१८) रहीम और करीम ने ७० दिन के लिए एक चरागाह ली जिसमें रहीम ने कुछ दिन तक १२० भेड़ें रखीं और करीम ने रहीम के गल्ले का $\frac{२}{३}$ शेष समय तक रखकर कुल का $\frac{१}{४}$ किराया दे दिया तो बताओ कि करीम ने अपनी भेड़ें कितने समय तक रखीं।

मिश्रित : (१९) क और ख कोई ठेका लेते हैं। क १० दिन तक १० आदमी लगाता है और इसके अतिरिक्त १५ आदमी ६ दिन तक। ख १२ आदमी १० दिन तक और फिर १५ आदमी १२ दिन तक लगाता है। यदि क को ३३२ रु० ८ आ० मिले तो ख को क्या मिलना चाहिये।

(२०) अ, ब, स किसी काम को ४ : ५ : ६ के अनुपात में धन लगाकर शुरू करते हैं। ३ मास पश्चात् अ अपना धन $\frac{१}{३}$ और बढ़ा देता है और ब ६ मास पश्चात् अपना धन $\frac{१}{४}$ बढ़ा देता है जबकि स ९ मास पश्चात् अपने धन का $\frac{१}{५}$ भाग निकाल लेता है। यदि एक वर्ष के लाभ में से अ को स से १४० रु० कम मिले तो कुल लाभ ज्ञात करो।

(२१) क, ख, ग ने एक व्यापार आरम्भ किया जिसमें प्रत्येक ने २००० रु० लगाये। ३ मास पश्चात् क ने अपना आधा रुपया निकाल लिया और अब से ३ मास पश्चात् ख ने अपना रुपया दुगुना कर दिया। ग को प्रबन्ध करने के लिए कुल लाभ का १०% मिलता है। यदि वर्ष के अन्त में कुल १३८० रु० का लाभ होता है तो प्रत्येक का भाग बताओ।

(२२) क और ख एक व्यापार में साझी होते हैं। क ने ५०० रु० और ख ने ६०० रु० लगाये। ५ मास के पश्चात् २०० रु० लगाकर ग और साझी बन गया। इसके ४ मास पश्चात् ख ने अपना सब रुपया निकाल लिया। वर्ष के अन्त में कुल लाभ ३८४ रु० हुआ। प्रत्येक को कितना-कितना रुपया मिला?

(रुड़की ओवरसियर, १९४९)

(२३) एक लालटेन वाली फैक्टरी में ६ पुरुष, २ स्त्रियाँ और ३ लड़के काम करते हैं। १ पुरुष, १ स्त्री और १ लड़का प्रतिदिन ३ : २ : १ के अनुपात में लालटेन बनाते हैं। एक लालटेन बनाने की मजदूरी २ आ० ६ पा० है। यदि सब की प्रतिदिन की मजदूरी १९ रु० ८ आ० ६ पा० हो तो बताओ १ पुरुष प्रतिदिन कितनी लालटेन बना देता है। (देहली बोर्ड, १९५३)

बारहवाँ अध्याय

प्रतिशतता

प्रतिशत (प्रति+शत) दो शब्दों से मिलकर बना है जिसका अर्थ 'सौ के लिए' अथवा 'सौ पर' या 'सौ पीछे' होता है।

राम ने अपनी १० प्रतिशत आय किराए में दे दी।

इसका अर्थ है कि उसने प्रत्येक १०० रु० की आय के पीछे १० रु० किराये में दिये। अर्थात्, उसने कुल आय का $\frac{१०}{१००}$ किराये में दे दिया।

'मैंने अंग्रेजी में पूर्णांक में ७५ प्रतिशत अंक प्राप्त किये।'

इसका तात्पर्य है कि मुझे अंग्रेजी विषय के पूर्णाङ्क में से प्रत्येक सौ पीछे ७५ अंक मिले, अर्थात् मैंने कुल अंक का $\frac{७५}{१००}$ प्राप्त किया।

सूचना :—प्रतिशत के लिए बहुधा चिह्न % व्यवहार में लाया जाता है।

परिभाषा :—प्रतिशतता वह भिन्न का हर १०० हो। भिन्न के अंश को प्रतिशत दर कहते हैं।

उदाहरण :—$\frac{९}{१००}$ वह प्रतिशत भिन्न है, जो कि प्रत्येक १०० पीछे ९ या ९ प्रतिशत प्रकट करती है। यहाँ ९ दर प्रतिशत है।

सूचना :—प्रतिशतता की समस्त क्रियायें इकाई की रीति अथवा समानुपात की रीति से करनी चाहिए।

प्रश्नावली १२

खंड क—नम्बर १—(१) ६ प्रतिशत से समानता रखने वाली भिन्न बताओ।

क्रिया :—६ प्रतिशत $= \frac{६}{१००} = \frac{३}{५०}$ उत्तर

निम्नलिखित प्रति सैकड़ा दरों से कौन सी भिन्न समझी जाती है ?

(२) ४ प्रतिशत (३) ३० प्रतिशत (४) ३$\frac{१}{३}$ प्रतिशत

(५) १२$\frac{१}{२}$ प्रतिशत (६) ११$\frac{१}{९}$% (७) १३३$\frac{१}{३}$% (८) ७·५%

नम्बर २—(९) भिन्न $\frac{२}{५}$ क्या प्रतिशत दर प्रकट करती है ?

क्रिया :—$\frac{२}{५} = \frac{\frac{२}{५} \times १००}{१००} = \frac{४०}{१००} =$ ४० प्रतिशत उत्तर

निम्नलिखित भिन्न कितने प्रतिशत दर प्रकट करती हैं :—

(१०) $\frac{३}{१०}$ (११) $\frac{५}{८}$ (१२) $\frac{१५}{८}$

(१३) किसी आरम्भिक पाठशाला के १५३ विद्यार्थियों में से १२५ लिखना सीखते हैं, तो उनकी प्रतिशत दर बतलाओ।

(१४) किसी ६०० पौंड की आय रखने वाले मनुष्य को ६ पेंस प्रति पौंड कर देना पड़ता है, तो बताओ कि वह इस प्रकार अपनी आय का कितने प्रतिशत देता है।

(१५) एक साइकिलोमीटर यन्त्र बनाने वाला उस पर निशान देने में $\frac{१२९}{१२८}$ को $\frac{२१७}{२००}$ के बराबर रखता है। तो बताओ वह कितनी प्रतिशत त्रुटि करता है।

नम्बर ३—(१६) २००० रुपये के १ आना ६ पाई प्रतिशत का मान ज्ञात करो।

क्रिया :—१ आना ६ पाई $= \frac{३}{३२}$ रुपये

अब, २००० रुपये का $\frac{३}{३२}$ प्रतिशत = २००० रु० का $\frac{३}{३२} \times \frac{१}{१००}$

$= \frac{१५}{८}$ रु० = १ रु० १४ आ० उत्तर

निम्नांकित का मान बताओ :—

(१७) २२५ पौंड का ७% (१८) १४० रु० का ७$\frac{१}{२}$%

(१९) कोई मुंशी किराया वसूल करने का ३$\frac{१}{३}$ प्रतिशत कमीशन लेता है। यदि उसने ६७५ पौंड किराया वसूल किया तो उसे कितना कमीशन प्राप्त हुआ?

(२०) एक दुकानदार नकद सौदे पर ५% कमीशन देता है, तो बताओ कि १२ रु० ८ आने की निशानी की वस्तु का उसे क्या लेना चाहिए।

नम्बर ४—(२१) वह संख्या क्या है जिसका कि २०%, ४४ है?

क्रिया :—संख्या का २०% = ४४

$\therefore$ संख्या का $\frac{२०}{१००}$ = ४४

$\therefore$ संख्या $= \frac{४४ \times १००}{२०} = २२०$ उत्तर

(२२) वह संख्या क्या है जिसका १२५% ५० है?

(२३) ८१ किस संख्या का $\frac{३}{४}$% है?

(२४) १ सेर ६ छ० किस भार का ११०% है?

(२५) किसी जिले की जनसंख्या जो इस समय ६२१३०० है पिछली गणना के समय से ९% बढ़ गई बतलाई जाती है, तो बताओ वह पिछली गणना के समय क्या थी।

(२६) एक चुनाव में कोई उम्मीदवार जो कि ६४% मत पाता है ११२० मतों से जीतता है, तो उस चुनाव में कुल मतदाताओं की संख्या बताओ।

(२७) एक विद्यार्थी ने परीक्षा में निम्नलिखित अंक प्राप्त किये, उसने प्रत्येक विषय में कितने प्रतिशत अंक पाये? इन उत्तरों को सारणी के पूर्णांकित स्थानों में लिखो :—

विषय	अंककुल	प्राप्त हुए अंक	प्रतिशत
अंग्रेजी	३००	१६५	*
गणित	२५०	१७५	*
विज्ञान	१५०	९०	*
इतिहास	१५०	१०५	*
हिन्दी	१५०	७५	*

(२८) निम्नलिखित पाटी के रिक्त स्थानों को भरो :—

नाम	सन् १९४१ में जनसंख्या	सन् १९३१ में जनसंख्या	उन्नति या अवनति	प्रतिशत उन्नति या अवनति
मद्रास	४९,३४२	४४,२०५	*	*
बम्बई	१७,९९२	२०,८५८	*	*
उत्तर प्रदेश	५५,०२१	४९,४०६	*	*

खंड ख – नम्बर ५—'२९) किसी सहशिक्षा पाठशाला में २०% विद्यार्थी ८ वर्ष से कम आयु के बालक हैं और ८ वर्ष से ऊपर की कन्याओं की संख्या ८ वर्ष से ऊपर के लड़कों की संख्या का $\frac{2}{3}$ या ४८ है, तो पाठशाला में विद्यार्थियों की संख्या बताओ।

क्रिया :— ८ वर्ष से अधिक की कन्यायें = ४८

∴ ८ वर्ष से अधिक के लड़कों की संख्या = ४८ का $\frac{३}{२}$ = ७२

∴ ८ वर्ष से ऊपर के लड़के व लड़कियों की संख्या = ७२ + ४८

= १२०

अब क्योंकि २०% विद्यार्थी पाठशाला में ८ वर्ष से कम के बालक हैं, इसलिए ८ वर्ष से ऊपर वाले लड़के व लड़कियों की संख्या ८०% है।

∴ ८० प्रतिशत बालक = १२०

∴ $\frac{८०}{१००}$ बालक = १२०

∴ पाठशाला के कुल विद्यार्थियों की संख्या = $\frac{१२० \times १००}{८०}$ = १५०

उत्तर

(३०) किसी सहशिक्षा पाठशाला में २५% विद्यार्थी ७ वर्ष से कम के बालक हैं और ७ वर्ष से अधिक आयु की लड़कियों की संख्या ७ वर्ष से अधिक आयु के लड़कों की संख्या का $\frac{३}{८}$ अथवा ३६ है, तो कुल विद्यार्थियों की संख्या बताओ।

(३१) एक फलवाला अपने आमों में से ४% फकीरों को दे देता है और शेष में से ६०% को बेच डालता है जिसके पश्चात् उसके पास ९६ आम शेष रह जाते हैं। तो बताओ उसके पास कितने आम थे।

नम्बर ६—(३२) अ अपना माल ब से १०% सस्ता और स से १०% महँगा बेचता है, तो बताओ कि स की दर ब से कितने प्रतिशत कम है।

क्रिया :—माना कि ब का विक्रय मूल्य = १०० रुपये

∴ अ ,, = ९० रुपये

किन्तु अ का भाव स से १०% अधिक है,

या अ का विक्रय मूल्य = स के मूल्य का ११०% = स का $\frac{११०}{१००}$

∴ स का विक्रय मूल्य = अ के मूल्य का $\frac{१००}{११०}$ = ९० रुपये का $\frac{१००}{११०}$

= $\frac{९००}{११}$ रुपये

∴ स का विक्रय मूल्य ब के विक्रय मूल्य से (१०० − $\frac{९००}{११}$) रुपये या $\frac{२००}{११}$ या १८ $\frac{२}{११}$% कम है। उत्तर

(३३) अ की आय ब से ६६$\frac{२}{३}$% अधिक है, तो बताओ ब की आय अ से कितने प्रतिशत कम है।

(३४) दो संख्याएँ तीसरी संख्या से २५ तथा २० प्रतिशत अधिक हैं, तो बताओ कि दूसरी संख्या पहली की कितने प्रतिशत है।

(३५) एक परीक्षा में, जिसमें कुल अंक २००० थे, कृष्ण ने हरी से २५% अधिक, हरी ने राम से २०% अधिक और राम ने मोहन से २०% कम अंक प्राप्त किये। यदि कृष्ण ने १५०० अंक प्राप्त किये हों तो मोहन को कितने % अंक मिले।

नम्बर ७—(३५) किसी वस्तु के मूल्य में १०% प्रति पौंड (भार के) कमी हो जाने से एक आदमी २५ शि० में १० पौंड अधिक खरीद लेता है, तो बताओ कि घटे हुए दाम प्रति पौंड क्या हैं तथा यथार्थ मूल्य प्रति पौंड क्या था।

क्रिया :—(अ) १०% मूल्य में कमी होने के कारण २५ शि० में बचत = २५ शि० का $\frac{१०}{१००}$ = $\frac{५}{२}$ शिलिंग

अब वह १० पौंड, $\frac{५}{२}$ शि० में खरीद सकता है।

∴ वह १ पौंड $\frac{५}{२\times१०}$ शि० = $\frac{१}{४}$ शि० या ३ पैं० में खरीद सकता है।

∴ प्रति पौंड घटा हुआ मूल्य = ३ पैं० उत्तर

(ब) फिर कमी की दर = १०% और घटा हुआ मूल्य प्रति पौंड ३ पैंस है।

∴ यथार्थ मूल्य का ९०% प्रति पौं० = ३ पैं०

∴ ” $\frac{९०}{१००}$ ” = ३ पैं०

∴ यथार्थ मूल्य प्रति पौं० = $\frac{१००\times३}{९०}$ पैंस

= $\frac{१०}{३}$ पैं० = ३$\frac{१}{३}$ पैंस उत्तर

(३६) अण्डों के मूल्य में ४०% कमी हो जाने पर कोई आदमी १ रुपये में ४८ अधिक क्रय कर सकता है तो (अ) अण्डों का घटा हुआ मूल्य बताओ, (ब) अण्डों का यथार्थ मूल्य बताओ।

(३७) सेब के भाव में ४% की कमी हो जाने के कारण ६ रुपये ६ आने में कोई आदमी १२ सेब अधिक खरीद सकता है, तो उनका असली भाव प्रति सेब बताओ।

खंड ग—नम्बर ८—(३८) आटे के भाव में २०% तेजी आने के कारण बतलाओ कि कोई आदमी उसके प्रयोग में कितने प्रतिशत कमी करे जिससे कि उसे अपना व्यय न बढ़ाना पड़े।

क्रिया:—आटे का मूल्य २०% अर्थात् $\frac{२०}{१००}$ या $\frac{१}{५}$ बढ़ गया।

∴ आटे का मूल्य अपने मूल्य का (१ + $\frac{१}{५}$) या $\frac{६}{५}$ गुना हो गया।

∴ उसे अपने आटे के व्यय को उतना ही रखने के लिए पहले की अपेक्षा आटे की मात्रा $\frac{५}{६}$ कर देनी चाहिये।

∴ आटे की मात्रा में जो कमी करनी है वह = १ − $\frac{५}{६}$ = $\frac{१}{६}$ भाग

∴ आटे में कमी प्रतिशत = $\frac{१}{६}$ × १०० = $\frac{१००}{६}$ = १६$\frac{२}{३}$ **उत्तर**

(३६) यदि कोयले का मूल्य ३० प्रतिशत बढ़ जाये, तो बताओ कि कोई आदमी उसके व्यवहार में कितने प्रतिशत कमी करे जिससे कि उसे अपना खर्चा न बढ़ाना पड़े।

(४०) घी के भाव में २५% मन्दा आ जाने से कोई गृहस्थी उसका व्यवहार कितने प्रतिशत बढ़ा दे जिससे कि उसे अपना खर्चा न कम करना पड़े!

नम्बर ६—(४१) किसी परीक्षा में ५२% विद्यार्थी अंग्रेजी तथा ४२% गणित में अनुत्तीर्ण रहे! यदि उनमें १७% अंग्रेजी तथा गणित दोनों में फेल हुए हों, तो इन दोनों विषयों में उत्तीर्ण होनेवालों की संख्या बताओ।

क्रिया:—अंग्रेजी तथा गणित में अनुत्तीर्ण होने वालों की संख्या
= ५२ + ४२ = ६४%

किन्तु इनमें उक्त दोनों विषयों के अनुत्तीर्ण विद्यार्थी भी सम्मिलित हैं जिनकी संख्या = १७% है।

∴ अनुत्तीर्ण होने वालों की कुल संख्या = ९४ − १७ = ७७%

∴ उत्तीर्ण होने वालों की संख्या = १०० − ७७ = २३% उत्तर

(४२) किसी परीक्षा में ८०% विद्यार्थी अंग्रेजी तथा ९०% विद्यार्थी गणित में पास हुए। यदि दोनों विषयों में फेल होने वालों की संख्या १५% हो और इस प्रकार १६५ इन दोनों विषयों में उत्तीर्ण हुए हों, तो परीक्षार्थियों की पूर्ण संख्या बताओ।

(४३) किसी परीक्षा में ३० तथा ३५ प्रतिशत विद्यार्थी क्रमशः अँग्रेजी और गणित में, तथा २७% इन दोनों विषयों में अनुत्तीर्ण रहे, तो इन दोनों विषयों में उत्तीर्ण होने वाले विद्यार्थियों की संख्या बताओ।

नम्बर १०—(४४) एक आदमी ने ५७३३ रुपये ५ आने ४ पाई के लिए २½% की दर से कुछ चीजों का बीमा कराया। सामान के अचानक खो जाने से उसने देखा कि उसको उसका मूल्य तथा बीमे की किस्त प्राप्त हो गई, तो बताओ कि उन चीजों का असली मूल्य क्या था।

सूचना :—बीमा कम्पनी उसे कहते हैं जो कि हानि और जीवन का बीमा करती है। यह संस्था मृत्यु या हानि होने पर कुछ धन देने का वादा करती है और इसके बदले बीमा कराने वाला वार्षिक कुछ किस्त देता रहता है, और इन दोनों के बीच का इकरारनामा पालिसी कहलाता है।

क्रिया :—यदि उसने १०० रु० का बीमा कराया होता तो उसे २½ रुपये देने पड़ते और हानि होने पर १०० रु० मिलते किन्तु उसने २½ रुपये की किस्त पहले ही दे दी।

∴ उसे मिलने वाला धन = (१०० − २½) = ९७½ रु०

इसलिये वस्तु का मूल्य तथा किस्त प्राप्त करने के विचार से उसे ९७½ रु० के माल पर १०० रु० का बीमा कराना चाहिए।

∴ जब बीमा १०० रु० का है तो माल का मूल्य = $\frac{१९५}{२}$ रु०

∴ जब बीमा १ रु० का है तो मूल्य = $\frac{१९५}{२ \times १००}$ रु०

∴ जब बीमा $\frac{१७२००}{३}$ रु० का है तो मूल्य = $\frac{१९५ \times १७२००}{२ \times १०० \times ३}$

= ५५९० रु० उत्तर

(४५) ५% की दर से ५३२ पौं० के माल पर कितने का बीमा कराया जाय कि नुकसान होने पर माल का मूल्य तथा किस्त का धन मिल जाय?

(४६) ३$\frac{३}{४}$% की दर से कोई मनुष्य अपनी वस्तुओं पर १२,००० पौं० का बीमा कराता है और वादा लेता है कि हानि होने पर उसे माल के दाम और किस्त का रुपया दिया जायगा, तो उसके माल का मूल्य तथा किस्त का धन ज्ञात करो।

नम्बर ११—(४७) मोहन और सोहन मिलकर ३६०० रु० कमाते हैं और क्रमशः अपनी-अपनी आय का ४०% और ३३$\frac{१}{३}$% व्यय कर देते हैं। यदि उनकी बचत ६ : ५ के अनुपात में हो तो बतओ कि प्रत्येक की आय कितनी है।

क्रिया :—मोहन अपनी आय का ४०% अर्थात् $\frac{४०}{१००}$ या $\frac{२}{५}$ खर्च कर देता है।

∴ मोहन अपनी आय का $(१ - \frac{२}{५})$ या $\frac{३}{५}$ भाग बचा लेता है।

और सोहन अपनी आय का ३३$\frac{१}{३}$% या $\frac{१}{३}$ भाग खर्च कर देता है।

∴ सोहन अपनी आय का $(१ - \frac{१}{३})$ या $\frac{२}{३}$ भाग बचा लेता है।

∴ मोहन की आय का $\frac{३}{५}$: सोहन की आय का $\frac{२}{३}$: : ६ : ५

या, (मोहन की आय का $\frac{३}{५}$) × ५ = (सोहन की आय का $\frac{२}{३}$) × ६

क्रिया, मोहन की आय × ५ = सोहन की आय × ४

∴ मोहन की आय : सोहन की आय : : ४ : ५

∴ उनकी सम्मिलित ३६०० रु० की आय को ४ : ५ के अनुपात में बाँटने पर,

मोहन की आय = ३६०० रु० का $\frac{४}{९}$ = १६०० रु०
सोहन की आय = ३६०० रु० का $\frac{५}{९}$ = २००० रु० } उत्तर

(४८) तीन आदमी अ, ब और स जिनका वेतन मिलकर १४४० रु० है, अपने-अपने वेतन काक्रमशः ८०, ८५ और ७५ प्रतिशत खर्च कर देते हैं। यदि उनकी बचत में क्रमशः ८ : ९ : २० का अनुपात हो तो उनके वेतन ज्ञात करो।

मिश्रित :—

(४९) चावल पर २०% कर कम होने पर उसकी खपत १५% बढ़ गई। तो बताओ कर में कितने प्रतिशत कमी हुई, और उसकी खपत कितने प्रतिशत बढ़े कि कर पहले के बराबर हो जाय।

(५०) यदि खाने की वस्तुओं के दाम १४०% बढ़ जाते हैं और खाने की वस्तुओं के प्रयोग में २५% की कमी हो जाती है, तो जितने रुपयों में ६ मनुष्य ३० दिन तक खाना खाते तो उतने ही रुपयों में ४ मनुष्य कितने दिनों तक खाना खायेंगे ?

(रुड़की, ओवरसियर, १९५१)

(५१) एक क्रिकेट के मैच की पहली इनिंग्स में एक स्कूल ने दूसरे की अपेक्षा ८५ रन अधिक बनाये, परन्तु दूसरी इनिंग्स में दूसरे स्कूल ने पहले की अपेक्षा ६४% अधिक रन बनाये। इस प्रकार दूसरा स्कूल ४३ रन से जीत गया। बताओ दूसरी इनिंग्स में दोनों स्कूलों ने कितने-कितने रन बनाये।

(रुड़की, ओवरसियर, १९५१)

(५२) एक आदमी अपने वेतन का २० प्रतिशत बचाता है। यदि उसका खर्चा महँगाई के कारण २० प्रतिशत और बढ़ जाय तो उसे केवल २० रु० माहवार ही बचे। तो उसका एक महीने का वेतन बताओ।

(उ० प्र०, १९४५)

तेरहवाँ अध्याय

लाभ और हानि

कोई वस्तु जितने मूल्य में प्राप्त की जाती है, वह उसका **क्रय-मूल्य** कहलाता है, तथा जिस मूल्य में वह वस्तु बेची जाती है वह उसका **विक्रय-मूल्य** कहलाता है।

यदि किसी वस्तु के क्रय-मूल्य से उसका विक्रय-मूल्य अधिक हो, तो उस दशा में जो अधिक प्राप्ति होती है वह **लाभ** तथा विक्रय-मूल्य के क्रय-मूल्य से कम होने पर जो कमी रहती है वह **हानि** कहलाती है।

उदाहरण १—यदि किसी कुर्सी का क्रय-मूल्य १० रु० तथा विक्रय-मूल्य १५ रुपये हों तो लाभ ज्ञात करो।

लाभ = १५ रु० − १० रु० = ५ रुपये।

∴ लाभ = विक्रय-मूल्य − क्रय-मूल्य

उदाहरण २—कोई पुस्तक ६ रु० में खरीद कर ४ रु० में बेची जाती है; तो हानि बताओ।

हानि = ६ रु० − ४ रु० = २ रु०

हानि = क्रय-मूल्य − विक्रय-मूल्य

उक्त उदाहरणों से निम्न परिणाम निकाले जा सकते हैं :—

(अ) क्रय-मूल्य = विक्रय-मूल्य − लाभ

या

= विक्रय-मूल्य + हानि

(ब) विक्रय-मूल्य = क्रय-मूल्य + लाभ,

या

= क्रय-मूल्य − हानि।

अब माना कि कोई वस्तु १६ रु० में प्राप्त करके २० रु० में बेची जाती है तथा दूसरी वस्तु ८ रु० में प्राप्त करके १२ रु० में बेची जाती है, तो उक्त दोनों ही परिस्थितियों में यथार्थ लाभ ४ रुपये हैं। किन्तु यह क्रिया इन दोनों दशाओं में लाभ ज्ञात करने के लिये उपयुक्त नहीं है। इसलिए हमको ४ रुपये का लाभ ज्ञात करते समय वस्तु के मूल्य का विचार भी रखना चाहिये। अतः हमको लाभ और हानि सर्वदा क्रय-मूल्य की प्रतिशत संख्या में प्रकट करने चाहिये।

पहली दशा में लाभ = १०० का $\frac{४}{१६}$ = २५%

और दूसरी दशा में लाभ = १०० का $\frac{४}{८}$ = ५०%

सूचना:—(अ) (१) क्रय-मूल्य संक्षेप में क्र० मू० लिखा जाता है।

(२) विक्रय-मूल्य संक्षेप में वि० मू० लिखा जाता है।

(३) क्रय-मूल्य को मौलिक मूल्य भी कहते हैं।

(ब) (१) यदि किसी दशा में २५% लाभ हो, तो

विक्रय-मूल्य = (१०० + २५) = १२५ प्रतिशत

(क्रय-मूल्य का)

(२) यदि किसी दशा में २५% हानि हो, तो

विक्रय-मूल्य = (१००—२५) = ७५ प्रतिशत (क्रय-मूल्य का)

प्रश्नावली १३

खंड—नम्बर १—(१) यदि शक्कर ४ आने ८ पाई प्रति सेर खरीद कर ५ आने १० पाई प्रति सेर बेची जाये तो उस पर यथार्थ लाभ तथा प्रतिशत लाभ ज्ञात करो।

क्रिया :—यथार्थ लाभ = (५ आ० १० पाई) – (४ आ० ८ पाई)

= १ आना २ पाई।

४ आना ८ पाई क्रय-मूल्य पर लाभ = १ आना २ पाई

या ५६ पाई ,, = १४ पाई

∴ १ पाई ,, = $\frac{१४}{५६}$ पाई

∴ १०० पाई ,, = $\frac{१४ \times १००}{५६}$ पाई

= २५ पाई ।

∴ अभीष्ट लाभ = २५%

तथा यथार्थ लाभ = १ आना २ पाई उत्तर

यथार्थ लाभ तथा प्रतिशत लाभ ज्ञात करो :—

(२) यदि एक सेर चावल १$\frac{१}{४}$ आना में क्रय करके १ आना ६ पाई में बेचे जायँ ।

(३) यदि कोई मनुष्य ३ रुपये प्रति भेड़ की दर से ५० भेड़ खरीद कर ४ रुपये ६ आने प्रति भेड़ की दर पर बेचे ।

(४) यदि कोई आदमी ८० पौंड में ४०० गज रेशम खरीदकर ३०० गज, ५ शिलिंग ६ पेंस, तथा शेष को जो खराब हो गया है २ शिलिंग प्रति गज बेचे

(५) यदि कोई मनुष्य १५० रुपये प्रति कोड़ी की दर से १०० बकरी खरीद कर ५० रुपये उन्हें खिला देने के बाद ७ रुपये ४ आने प्रति बकरी बेचे ।

नम्बर २—(६) बतलाओ कि मैं अपनी साइकिल जिसका क्रय-मूल्य ४० रुपये हैं, कितने रुपये में बेच दूँ कि मुझे १५% लाभ हो ।

क्रिया :—मैं अपनी साइकिल इस प्रकार बेचना चाहता हूँ कि यदि मैं १०० रुपये की ऐसी कोई चीज लूँ तो उसे ११५ रुपये में बेच सकूँ ।

जब क्रय-मूल्य १०० रुपये हैं तो विक्रय-मूल्य = ११५ रु०

∴ ,, १ ,, ,, = $\frac{११५}{१००}$ रु०

∴ ४० ,, = $\frac{११५ \times ४०}{१००}$ रु०

= ४६ रु० उत्तर

(७) एक छतरी जिसका मूल्य ८ शिलिंग ४ पेंस है, १४% लाभ पाने की इच्छा से किस मूल्य में बेची जानी चाहिए ?

(८) ३०० रु० के मूल्य का माल बेचने पर यदि किसी दुकानदार को १८% हानि रही हो, तो उसका विक्रय मूल्य बतलाओ।

(९) किसी दुकानदार ने ७ नारंगी प्रति शिलिंग की दर से कुछ नारंगियाँ खरीदीं और उन्हें ४०% के लाभ से बेच दिया, तो बताओ कि खरीदार को प्रति शि० कितनी नारंगियाँ मिलीं।

नम्बर ३—(१०) कोई वस्तु यदि २०% के लाभ से १२ शि० में बेची गई हो, तो उसका क्रय-मूल्य बताओ।

क्रिया :—माना कि वस्तु का क्रय-मूल्य = १०० शि०

और चूँकि लाभ = २०%

∴ उसका विक्रय-मूल्य = (१०० + २०) = १२० शिलिंग

जबकि वि० मूल्य १२० शिलिंग है तो क्रय-मूल्य = १०० शिलिंग

∴ ,, १ शिलिंग ,, $= \frac{१००}{१२०}$ शिलिंग

∴ ,, १२ शिलिंग ,, $= \frac{१०० \times १२}{१२०}$ शिलिंग

= १० शिलिंग उत्तर

(११) किसी माल को १७ पौं० ४ शिलिंग में बेचने पर ७½% लाभ होता है, तो क्रय-मूल्य बताओ।

(१२) ५ रुपये १२ आने में एक पुस्तक बेचने से किसी पुस्तक विक्रेता को ८% हानि रही, तो उसका यथार्थ मूल्य बताओ।

(१३) ११२ रुपये ८ आने में एक कुर्सी तथा मेज बेचने से मुझे २५% का लाभ रहा। यदि कुर्सी का क्रय-मूल्य ४० रुपये हो तो मेज का क्रय-मूल्य बताओ।

(१४) यदि ९ पेंस प्रति दर्जन की दर से अन्डे २०% के लाभ पर बेचे जा सकते हैं, तो बताओ कि उनका मूल्य प्रति कोड़ी क्या होगा।

(१५) किसी फलवाले ने २०० आम खरीदे जिनमें से २० गल गए। शेष को उसने कुल पर ८% के लाभ से ६ पाई के ५ की दर से बेच दिये। तो बताओ कि उनका क्रय-मूल्य प्रति कोड़ी क्या था।

निम्नलिखित तालिका में पुष्पांकित स्थानों की पूर्ति करो :—

	क्रय-मूल्य	विक्रय-मूल्य	लाभ या हानि प्रतिशत
(१६)	७५ रुपये	७१ रुपये ४ आने	* * *
(१७)	१२ पौंड १० शि०	* * *	२५% लाभ
(१८)	* * *	२०६६ रुपये १० आने ८ पाई	१७$\frac{1}{3}$% हानि
(१९)	५ आना ४ पाई के ५ आम	१ आना ४ पाई का १ आम	* * *
(२०)	६ आने ८ पाई	* * *	५०% हानि
(२१)	७ आने दर्जन	१४ आने कोड़ी	* * *

नम्बर ४—(२२) २३ रुपये में एक घोड़ा बेचकर यदि मुझे १५% लाभ होता है, तो बताओ कि वह किस मूल्य पर बेचा जाये कि लाभ केवल १०% ही हो।

क्रिया :—यहाँ पहले हमको घोड़े का क्रय-मूल्य ज्ञात करना है।

माना कि उसका क्रय-मूल्य = १०० रु०

∴ १५% लाभ पाने के लिये उसे (१००+१५) या ११५ रु० में बेचना चाहिए।

अब यदि वि० मू० ११५ रु० है तो क्रय-मूल्य = १०० रु०

∴ „ १ „ „ $=\frac{१००}{११५}$ रु०

∴ „ २३ „ „ $\frac{१०० \times २३}{११५}$ = २० रु०

फिर यदि उस पर लाभ १०% ही लेना है तो उसका विक्रय मूल्य १००+१०=११० रु० होना चाहिए।

जबकि क्रय-मूल्य १०० रु० है, तो विक्रय मूल्य = ११० रु०

∴ „ १ „ „ $=\frac{११०}{१००}$ रु०

∴ „ २० „ „ $=\frac{११० \times २०}{१००}$

= २२ रु०

∴ अभीष्ट विक्रय-मूल्य = २२ रु० उत्तर।

(२३) ११ पेंस प्रति दर्जन नारंगियाँ बेचने पर मुझे १०% लाभ होता है, तो बताओ कि २५% लाभ प्राप्त करने के लिये प्रति दर्जन क्या विक्रय-मूल्य रखना होगा।

(२४) कोई आदमी अपना माल ६% हानि से ८५ रुपये में बेचता है, तो बताओ १३$\frac{३}{५}$% लाभ पाने के लिये उसका विक्रय-मूल्य क्या होना चाहिये।

(२५) यदि १०६ गज कपड़ा ४६ पौंड ६ शिलिं ६ पेंस में बेचने पर ८% लाभ हो तो १७% लाभ होने के लिये एक गज का विक्रय-मूल्य क्या होना चाहिये।

नम्बर ५—(२६) ३ पेंस में ४ की दर से किसी स्त्री ने कुछ अण्डे खरीदे और उन्हें ४ पेंस में ५ की दर से बेच डाला, जिससे कि उसे २ शिलिंग का लाभ हुआ, तो बताओ कि उसने कितने अण्डे खरीदे।

क्रिया :— ∵ ४ अण्डों का क्रय-मूल्य = ३ पेंस

∴ १ अण्डे का क्रय-मूल्य = $\frac{3}{4}$ पेंस

∵ ५ अण्डों का वि० मूल्य = ४ पेंस

∴ १ अण्डे का वि० मूल्य = $\frac{4}{5}$ पेंस

∴ १ अण्डे पर लाभ = ($\frac{4}{5}$ − $\frac{3}{4}$) = $\frac{1}{20}$ पेंस

किन्तु सम्पूर्ण लाभ = २ शिलिंग, या २४ पेंस

∴ अण्डों की संख्या = २४ ÷ $\frac{1}{20}$ = २४ × २० = ४८० उत्तर

सूचना :— विद्यार्थियों को समान संख्या जैसे १ का क्र० मू० तथा वि० मू० निकालना चाहिए।

दूसरी विधि :—

क्रिया :— ३ पेंस में ४ अण्डे या १५ पेंस में २० अण्डे

और, ४ पेंस में ५ अण्डे या १६ पेंस में २० अण्डे

∴ प्रति २० अण्डों पर उसे १ पेंस का लाभ हुआ।

∴ २४ पेंस लाभ उसको (२४ × २०) अण्डों पर हुआ।

∴ अण्डों की संख्या = ४८० उत्तर।

सूचना :— दोनों दशाओं में अंडों की संख्या बराबर कर लो जैसे कि उन्हें उक्त उदाहरण में ४ तथा ५ के ल० स० के समान समझ कर किया गया है।

सम्मति :— दूसरी विधि प्रथम से सुगम है, कारण कि इसमें भिन्न नहीं आती।

(२७) ८ शि० ४ पेंस प्रति सैकड़ा पर क्रय करके १ शि० ३ पेंस प्रति दर्जन की दर से कुछ चीजें बेचने पर यदि कुल लाभ १ पौंड हो, तो उन चीजों की संख्या बताओ।

(२८) हरी ने ४ आने प्रति दर्जन की दर से कुछ आम खरीदे और उनको ७ आने कोड़ी की दर से बेच दिया। तो बताओ कि यदि इस प्रकार उसे १ रु० का लाभ हुआ हो, तो उसने कितने आम खरीदे।

(२६) यदि मैं कुछ नारंगियाँ १ पैसे में २ तथा उनसे आधी ३ पैसे में ४ की दर से खरीदूँ, तो बताओ कि मैं उन पर २०% लाभ प्राप्त करने के लिए किस दर पर बेचूँ। तथा, यदि उन पर लाभ १४ आने का हुआ हो, तो उनकी संख्या क्या थी ?

खंड ख—नम्बर ६—(३०) हरी मोहन को एक साइकिल ४% लाभ पर बेचता है और मोहन उसे सोहन को ५% लाभ से देता है। यदि सोहन ने उसका मूल्य ४ पौंड ११ शि० दिया हो तो उसे हरी ने कितने में खरीदी होगी ?

सूचना :—जब किसी माल का क्रय-विक्रय कई मनुष्यों के बीच में होता है, तो पहले का वि० मूल्य दूसरे का क्रय-मूल्य तथा दूसरे का विक्रय मूल्य तीसरे का क्रय-मूल्य तथा इसी प्रकार आगे भी होता है। इसके अतिरिक्त हानि-लाभ का विचार भी उन प्रत्येक के क्रय-मूल्य पर पृथक्-पृथक् किया जाता है।

क्रिया :—सोहन का क्रय मूल्य = ४ पौंड ११ शि० = $\frac{९१}{२०}$ पौंड

किन्तु साइकिल मोहन से सोहन ने खरीदी, इसलिए मोहन का वि० मूल्य सोहन का क्रय-मूल्य होगा।

या मोहन का वि० मूल्य = $\frac{९१}{२०}$ पौंड

∴ मोहन का क्रय मूल्य = $\frac{९१}{२०}$ पौंड का $\frac{१००}{१०५}$ [∵ लाभ = ५%]

= $\frac{१३}{३}$ पौंड

फिर, मोहन ने उसे हरी से खरीदा इसलिए हरी का वि० मूल्य मोहन का क्रय-मूल्य हुआ, या हरी का वि० मूल्य = $\frac{१३}{३}$ पौंड,

∴ हरी का क्रय मूल्य = $\frac{१३}{३}$ पौंड का $\frac{१००}{१०४}$ [∵ लाभ = ४ प्रतिशत]

= $\frac{२५}{६}$ पौंड = ४ पौंड ३ शि० ४ पेंस उत्तर

(३१) यदि अ ने अपना माल ब को १७$\frac{१}{२}$% तथा ब ने स को ६$\frac{१}{४}$% लाभ से बेचा और स ने उसके लिए ८३४ रुपये ४ आने दिये तो बताओ कि उसे अ ने कितने मूल्य में खरीदा था।

(३२) अ अपना माल ब को ११५ पौंड १६ शिलिंग २ पेंस में बेचकर मौलिक मूल्य पर १०% लाभ प्राप्त करता है, तथा ब उसे फिर १०% की हानि से बेच देता है, तो बताओ कि अ ने उसे किस मूल्य पर खरीदा और ब ने उसे किस मूल्य पर बेचा।

(३३) यदि एक ग्रामोफोन बनाने वाले ने एक ग्रामोफोन १५% लाभ पर किसी दुकानदार को तथा उसने १०%लाभ से किसी व्यापारी को और व्यापारी ने २५% लाभ लेकर किसी खरीदार को बेचा। बताओ वह खरीदार को कितने में मिला होगा, जबकि उसके बनाने वाले को वह ६२ रुपये ८ आने में पड़ा हो।

(३४) कोई नल बनाने वाला उसे १५% लाभ पर एक थोक व्यापारी को बेचता है। तथा वह ८% लेकर किसी दुकानदार को दे देता है, जो उसको १२% लाभ पर किसी जमींदार को २५० रुपये में बेचता है। बताओ कि वह नल बनाने वाले को कितने में पड़ा होगा। (निकटस्थ पाई तक मान ज्ञात करो तथा अनावश्यक क्रिया सब छोड़ दो)।

(३५) एक आदमी अपनी पूँजी क्रमशः ४ व्यवसायों में लगाता है। यदि प्रथम में उसको १००% लाभ तथा शेष सब में २०% हानि रहती है, तो बताओ उसे अपने मौलिक धन पर कितने प्रतिशत लाभ हुआ।

नम्बर ७—(६६) यदि १० पुस्तकों का विक्रय मूल्य ११ पुस्तकों के क्रय मूल्य के बराबर है तो प्रतिशत लाभ ज्ञात करो।

क्रिया :—माना कि १ पुस्तक का क्रय-मूल्य = १ रु०

∴ ११ " " = ११ रु०

∵ १० पुस्तकों का विक्रय-मूल्य = ११ पुस्तकों का क्रय-मूल्य

∴ १० " " = ११ रु०

∴ ११ " " $= \frac{११ \times ११}{१०}$ रु० $= \frac{१२१}{१०}$ रु०

∴ ११ रु० पर लाभ $= (\frac{१२१}{१०} - ११)$ रु० $= \frac{११}{१०}$ रु०

∴ १०० रु० पर लाभ $= \frac{११ \times १००}{१० \times ११}$ रु० = १० रु०

अभीष्ट लाभ = १०% उत्तर

(३७) यदि कोई मनुष्य २२ वस्तुएँ उतने ही में बेचता है जितने में कि वह उन ३६ को खरीदता है, तो उसका प्रतिशत लाभ ज्ञात करो।

(३८) यदि ३ कुर्सियाँ ४ कुर्सियों के क्रय-मूल्य में बेची जाती हैं, तो प्रतिशत लाभ ज्ञात करो।

(३९) कोई मनुष्य ५० चीजें बेचकर १० चीजों के क्रय-मूल्य के बराबर लाभ उठाता है। उसको कितने प्रतिशत लाभ हुआ ?

(४०) ४८ रुपये में २७ टोपियाँ बेचने से एक दुकानदार को ५ टोपियों का क्रय-मूल्य बच रहता है, तो एक टोपी का क्रय-मूल्य बताओ।

नम्बर ८—(४१) यदि किसी दुकानदार को १२० कुर्सियों के विक्रय-मूल्य पर ३० कुर्सियों के विक्रय-मूल्य का लाभ होता है तो उसको कितने प्रतिशत लाभ होगा ?

क्रिया :—१२० कुर्सियों का विक्रय-मूल्य = १२० कुर्सियों का क्रय-मूल्य + लाभ, परन्तु लाभ = ३० कुर्सियों का वि०-मूल्य

∴ १२० कुर्सियों का वि० मू० = १२० कुर्सियों का क्र० मू + ३० कुर्सियों का वि० मू०

∴ १२० का वि० मू० − ३० कुर्सियों का वि० मू०
= १२० कुर्सियों का क्र० मू०

∴ ९० कुर्सियों का वि० मू० = १२० कुर्सियों का क्र० मू०
= ९० कुर्सियों का क्र० मू० + ३० कुर्सियाँ का क्र० मू०

∴ ९० कुर्सियों के क्र० मू० पर लाभ = ३० कुर्सियों का क्र० मू०

∴ १ „ „ „ $= \frac{३०}{९०}$ „

∴ १०० „ „ „ $= \frac{१०० \times ३०}{९०}$ „

$= ३३\frac{१}{३}$ „ „

∴ लाभ = $३३\frac{१}{३}$ प्रतिशत **उत्तर**

(४२) किसी दुकानदार को १८० आम बेचने पर ३० आम के विक्रय-मूल्य का लाभ होता है। उसको कितने प्रतिशत का लाभ होता है ?

(४३) एक मनुष्य ने १२८ गज कपड़ा बेचा और उसको १६ गज के विक्रय-मूल्य के बराबर हानि हुई। उसको कितने प्रतिशत हानि हुई?

(४४) एक बनिये को कुछ वस्तुओं के बेचने पर उनकी आधी संख्या के विक्रय-मूल्य का लाभ होता है, तो उसका प्रतिशत लाभ ज्ञात करो।

नम्बर ६—(४५) किसी वस्तु के विक्रय-मूल्य में ५० प्रतिशत कमी करने से एक दुकानदार को १५ प्रतिशत की हानि होती है, तो उसको असली विक्रय-मूल्य पर बेचने से कितने प्रतिशत लाभ होता है?

क्रिया :—१५ प्रतिशत की हानि से वि० मू० = क्र० मू० का ८५ प्रतिशत

परन्तु चूँकि वि० मू० में ५० प्रतिशत की कमी हुई।

∴ वि० मू० का ५० प्रतिशत = क्र० मू० का ८५ प्रतिशत

∴ वि० मू० का $\frac{१}{२}$ „ = क्र० मू० का ८५ „

∴ वि० मू० = क्र० मू० का १७० „

अर्थात् यदि क्र० मू० १०० रु० है तो विक्रय-मूल्य = १७० रु०

∴ लाभ = ७० प्रतिशत उत्तर

(४६) यदि किसी मोटरकार के विक्रय-मूल्य में ६० प्रतिशत की कमी करने से २० प्रतिशत की हानि हो, तो बताओ कि उसको पहले विक्रय-मूल्य पर बेचने से कितने प्रतिशत का लाभ है?

(४७) किसी घड़ी के विक्रय-मूल्य में ४० प्रतिशत बढ़ाने से २० प्रतिशत का लाभ होता है। यदि वह घड़ी पहले ही विक्रय-मूल्य पर बेची जाये, तो कितने प्रतिशत हानि होगी?

नम्बर १०—(४८) एक एजेण्ट अपनी विज्ञापित वस्तुओं पर २५% कमीशन देकर भी २०% लाभ कमाता है। तो बताओ कि उस ट्रैक्टर की क्या विज्ञापित कीमत होगी, जिस पर कि उसे ३० पौं० का लाभ हुआ हो।

क्रिया :—माना कि ट्रैक्टर का विज्ञापित मूल्य = १०० पौंड

कमीशन = २५ प्रतिशत

∴ यथार्थ वि० मू० = ७५ पौं०

किन्तु लाभ की दर = २० प्रतिशत

∴ ट्रैक्टर का क्रय-मूल्य = ७५ पौं० का $\frac{१००}{१२०}$

$= \frac{१२५}{२}$ पौं०

∴ यथार्थ लाभ $= (७५ - \frac{१२५}{२}) = \frac{२५}{२}$ पौं०

अब $\frac{२५}{२}$ पौं० लाभ उस दशा में है जब कि विज्ञापित मूल्य = १०० पौं०

∴ १ पौं० " " $= \frac{२ \times १००}{२५}$ पौं०

∴ ३० पौं० " " $= \frac{२ \times १०० \times ३०}{२५} = २४०$ पौं०

∴ ट्रैक्टर का विज्ञापित मूल्य = २४० पौं०

(४९) कोई व्यापारी अपने माल पर खरीदारों को ४% छूट देता है। बताओ कि वह १०० रु० के माल का क्या दाम रखे कि उसे भी २०% लाभ हो जाये।

(५०) किसी व्यापारी का मूल्य क्रय मूल्य से २६% अधिक है। तो बताओ कि वह खरीदारों को १०% छूट देकर भी क्या प्रतिशत लाभ प्राप्त करेगा।

नम्बर ११—(५१) कोई दुकानदार अपने क्रय मूल्य पर कितने प्रतिशत दाम बढ़ाये कि खरीदारों को ४% कमीशन देकर भी उसे १०% का लाभ मिल जाये ?

क्रिया :—माना कि माल का बढ़ा हुआ मूल्य = १०० रु०

छूट = ४ „

∴ यथार्थ विक्रय-मूल्य = ९६ „

किन्तु लाभ की दर १०%

∴ माल का यथार्थ मूल्य = ९६ रुपये का $\frac{१००}{११०}$ = $\frac{९६०}{११}$ रु०

अब जब कि क्र० मू० $\frac{९६०}{११}$ रु० है, तो वि० मू० = १०० „

∴ „ „ = $\frac{११ \times १००}{९६०}$ रु०

∴ „ १०० रु० „ = $\frac{११ \times १०० \times १००}{९६०}$

= $\frac{१३७५}{१२}$ रु०

∴ उसको (११४$\frac{७}{१२}$ − १००) = १४$\frac{७}{१२}$

या १४$\frac{७}{१२}$ प्रतिशत मूल्य बढ़ाना चाहिए। उत्तर

(५२) कोई व्यापारी नकद बिक्री पर ५% छूट देता है। बताओ कि वह अपने माल के कितने प्रतिशत दाम बढ़ाए कि उसे क्रय मूल्य पर २०% लाभ हो।

नम्बर १२—(५३) एक दुकानदार अपना माल खरदने व बेचने में गलत तराजू द्वारा १५% का धोका करता है तो बताओ कि इस बेईमानी से वह कितने प्रतिशत लाभ पाता है।

क्रिया :—पहली दशा में जबकि वह व्यापारी कहने को १०० रु० का माल खरीदता है, तो वह ११५ रु० का माल प्राप्त करता है।

दूसरी दशा में जब वह १०० का माल देता है, तो वह उसके बदले ११५ रु० लेता है।

$\therefore$ १ रु० के माल के वह $\frac{११५}{१००}$ रु० लेता है।

$\therefore$ ११५ " $\frac{११५ \times ११५}{१००}$ रु० $=$ १३२$\frac{१}{४}$ रु०

$\therefore$ अभीष्ट लाभ $=$ (१३२$\frac{१}{४}$ $-$ १००) $=$ ३२$\frac{१}{४}$% उत्तर

(५४) कोई दुकानदार गलत तराजू से लेनदेन में २०% का छल करता है, तो बताओ कि वह अपने मौलिक धन पर क्या प्रतिशत लाभ कमाता है।

(५५) कोई बेईमान दुकानदार अपना माल क्रय-मूल्य पर ही बेचता है' किन्तु वह एक सेर में १५ छटाँक माल देता है, तो उसका प्रतिशत लाभ ज्ञात करो।

(५६) किसी दुकानदार ने अपना माल गलत बाट से बेचने पर १५ प्रतिशत की हानि उठाई, तो बताओ कि उसने १ पौंड के लिए क्या वजन प्रयोग किया था।

(५७) एक बेईमान व्यापारी अपने सामान का मूल्य, क्रय-मूल्य से ५ प्रतिशत अधिक रखता है परन्तु वह गलत तराजू रखता है। जब तराजू का डंडा तिरछा होता है तो एक पलड़े का वजन $\frac{१}{५}$ बढ़ जाता है। बताओ उसको इस प्रकार कितने प्रतिशत लाभ होता है।

खंड ग—नम्बर १३—(५८) किसी दूकानदार ने एक रेडियो बेचकर १०% लाभ कमाया। यदि वह उसे १०% घाटे पर देता, तो पहले से ६० रु० कम मिलते तो बताओ रेडियो का मौलिक मूल्य क्या था।

या :—माना कि रेडियो या क्रय-मूल्य $=$ १०० रु०

तो प्रथम दशा में उसका विक्रय-मूल्य $=$ (१०० $+$ १०) $=$ ११० रु०

दूसरी दशा में उसका विक्रय-मूल्य $=$ (१०० $-$ १०) $=$ ९० रु०

दोनों दशाओं में विक्रय-मूल्य का अन्तर

$=$ (११० $-$ ९०) $=$ २० रु०

जबकि विक्रय-मूल्य का अन्तर २० रु० है तो क्रय-मूल्य = १०० रु०

∴ ” १ रु० ” $= \frac{१००}{२०}$ रु०

∴ ” ६० ,, $= \frac{१०० \times ६०}{२०}$ रु० = ३०० रु०

∴ रेडियो का अभीष्ट मूल्य = ३२० रु० उत्तर

(५६) खलील अहमद ने अपना फर्नीचर १५% हानि पर बेच दिया। यदि उसे ८ रुपये और मिल गए होते तो उसको १५% का लाभ हो जाता। तो बताओ कि उसका मूल्य क्या था?

(६०) यदि १२६ पौंड के स्थान पर १३१ पौंड ५ शिलिंग में बेचने में किसी भूमि भाग के स्वामी को ७% अधिक लाभ हो जाता है तो उस भूमि का क्रय-मूल्य बताओ।

(६१) १ आना प्रति गज कम पर बेचने से ५% लाभ उतनी ही हानि में परिवर्तित हो जाता है। तो बताओ कि वस्तु का क्रय-मूल्य क्या है।

नम्बर १४—(६२) प्रतापसिंह ने अपना हार्मोनियम १०% लाभ से बेच दिया। यदि उसे वह ५% और भी कम मूल्य पर मिल गया होता और वह उसे ६ रुपया अधिक में बेचता तो उसे दूना प्रतिशत लाभ होता। तो बताओ कि उसका क्रय-मूल्य क्या था।

क्रिया :—माना कि क्रय-मूल्य = १०० रु०

पहला विक्रय-मूल्य १०% लाभ सहित = ११० रुपये

∴ दूसरा क्रय-मूल्य ५% कमी सहित = ९५ रुपये

∴ दूसरा वि० मू० २०% लाभ सहित = ९५ रु० का $\frac{१२०}{१००}$

= ११४ रु०

दोनों वि० मू० का अन्तर = (११४ − ११०) या ४ रु०

जबकि वि० मू० का अन्तर ४ रु० है तो क्र० मू० = १०० रु०

∴ ” ” १ रु० ” $= \frac{१००}{४}$ रु०

∴ ” ” ६ रु० ” $= \frac{१०० \times ६}{४}$ रु०

= २२५ रु०

∴ अभीष्ट क्र० मू० = २२५ रु० उत्तर

९

(६३) कोई आदमी अपना माल क्र० मू० से ५% अधिक पर बेचता है। यदि वह पहले क्रय-मूल्य से ५% और कम पर खरीद कर १ रु० और कम में भी बेचता तो उसे १०% प्रतिशत लाभ होता। तो बताओ उसका क्र० मू० क्या है।

(६४) कोई वस्तु जो १२$\frac{1}{2}$% लाभ पर बेची जाती है यदि १०% और कम पर खरीद कर ६ रु० अब से अधिक पर बेच दी जाती तो उस पर ३२$\frac{1}{5}$% लाभ होता। तो बताओ कि उसका क्र० मू० क्या है।

नम्बर १५—(६५) कृष्णा ने अपनी मोटर बाईसिकल कुछ लाभ लेकर १००० रु० में नीलाम की। यदि वह उसे ८०० रु० में नीलाम कर देता तो उसे वर्तमान लाभ के $\frac{1}{4}$ के बराबर हानि हो जाती। तो बताओ उसका क्र० मू० क्या था।

क्रिया :—जब मोटर बाईसिकल १००० रु० में बेची गई तो उसमें लाभ था।

किन्तु ८०० रु० में बेचने पर उसमें हानि थी।

इससे यह स्पष्ट है कि इन दोनों वि० मूल्यों के अन्तर में लाभ और हानि दोनों ही सम्मिलित हैं।

∴ लाभ + हानि = २०० रु०

किन्तु प्रश्न में दी हुई शर्त के अनुसार,

हानि = लाभ का $\frac{1}{4}$

∴ लाभ + लाभ का $\frac{1}{4}$ = २०० रु०

∴ $\frac{5}{4}$ लाभ = २०० रु०

∴ लाभ = २०० रु० का $\frac{4}{5}$ = १६० रु०

∴ क्र० मू० = (१००० − १६०) = ८४० रु० उ

(६६) १३ पौंड ६ शि० ८ पें० में एक घोड़ा बेचकर किसी मनुष्य को हानि रहती है। किन्तु उसे १६ पौं० १३ शि० ४ पें० में बेचने से उस पहली हानि के $\frac{2}{3}$ के बराबर लाभ हो जाता है। बताओ उसका क्रय-मू क्या है।

(६७) कुछ लाभ लेकर एक आदमी एक पियानो बाजा ११५० रु० में बेच देता है। यदि वह उसे ६१० में बेचता तो उसे लाभ के $\frac{2}{3}$ के बराबर हानि हो जाती। तो उसका क्र० मू० बताओ।

(६८) एक मोटर १०८० रु० में कुछ हानि पर बेची गई। यदि वह १३८० रु० में बिक जाती तो बेचने वाले को हानि के ड्योढ़े के बराबर लाभ होता, तो बताओ कि उसका क्र० मू० क्या था।

नम्बर १६—(६६) १ सेर चावल तथा ४ सेर शक्कर का मूल्य ३ रु० १२ आ० है। किन्तु यदि शक्कर का भाव ५०% तथा चावल का १०% बढ़ जाय तो उनका मूल्य ४ रु० १० आ० होगा। तो चावल और शक्कर का पृथक्-पृथक् प्रति सेर मूल्य बताओ।

क्रिया :—यदि शक्कर व चावल का मूल्य ५०% बढ़ जाय तो १ सेर चावल तथा ४ सेर शक्कर का मूल्य

= ३ रु० १२ आ० का १५०% = ३ रु० १२ आ० का $\frac{१५०}{१००}$

= ५ रु० १० आ०

किन्तु चावल की मूल्य-वृद्धि = १०%

∴ १ सेर चावल के मूल्य का ४०% = (५ रु० १० आ०–४ रु० १० आ०)

= १ रु०

∴ १ सेर चावल के मूल्य का $\frac{४०}{१००}$ = १ रु०

∴ १ सेर चावल का मूल्य = $\frac{१००}{४०}$ रु०

= २ रु० ८ आ०

∴ ४ सेर शक्कर का मूल्य = (३ रु० १२ आ – २ रु० ८ आ०)

= १ रु० ४ आ०

∴ १ सेर शक्कर का मूल्य = (१ रु० ४ आ०) ÷ ४

= ५ आ०

∴ १ सेर चावल का मूल्य = २ रु० ८ आ०
और १ सेर शक्कर का मूल्य = ५ आ० } उत्तर

(७०) १ पौंड चिकोरी तथा ३ पौंड चाय का मूल्य ५ शि० है। किन्तु चाय का मूल्य ३३$\frac{१}{३}$% तथा चिकोरी का ५०% बढ़ जाने पर वह ७ शि० में मिलने लगती है। तो बताओ कि दोनों की पृथक्-पृथक् प्रति पौंड क्या दर है।

(७१) एक आदमी ने दो घोड़े ६०० रुपये में खरीदकर एक को ४% हानि तथा दूसरे को ५% लाभ पर बेच डाला किन्तु इससे उसको हानि या लाभ कुछ नहीं हुआ तो बताओ प्रत्येक घोड़े का मूल्य क्या था।

(७२) एक आदमी ने दो पुरानी मशीनें १३५० पौंड में मोल लीं फिर उसने उनको अपने लिए व्यर्थ जानकर एक ७$\frac{१}{२}$% लाभ तथा दूसरी १४% हानि पर बेच डाली। उसे ज्ञात हुआ कि उन दोनों का विक्रय-मूल्य समान ही रहा। तो बताओ कि उनका क्रय-मूल्य पृथक्-पृथक् क्या था।

(७३) एक व्यापारी ने दो मकान मोल लिए, जिनमें एक का मूल्य दूसरे से ५०० रुपये अधिक था और उन दोनों को ३% तथा ५% के लाभ से बेच दिया। यदि उसे कुल २५५ रु० का लाभ रहा हो, तो प्रत्येक मकान का मौलिक मूल्य बताओ।

नम्बर १७—(७४) अपनी गाय १६ रुपये में बेचकर राम को उसके क्रय-मूल्य के बराबर प्रतिशत की हानि हुई। तो गाय का मौलिक मूल्य ज्ञात करो।

क्रिया :—माना कि गाय का क्र० मू० $= क$ रु०

$\therefore$ हानि $= क\%$

$\therefore$ यथार्थ हानि $= क$ का $\frac{क}{१००} = \frac{क^{२}}{१००}$ रु०

गाय का वि० मू० $= \left(क - \frac{क^{२}}{१००} \right)$ रु०

किन्तु प्रश्न की शर्त के अनुसार

$$क - \frac{क^२}{१००} = १६$$

या $$१०० क - क^२ = १६ \times १००$$

पक्षान्तरानयन द्वारा,

$$क^२ - १०० क = - १६ \times १००$$

प्रत्येक पक्ष में ५०२ योग करने से,

$$क^२ - १०० क + ५०^२ = ५०^२ - १६ \times १००$$

$$(क - ५०)^२ = ५०^२ - १६ \times १००$$

दोनों पक्ष का वर्गमूल लेने पर,

$$क - ५० = \pm\sqrt{५०^२ - १६ \times १००}$$

पुनः पक्षान्तरानयन से,

$$*क = ५० \pm \sqrt{५०^२ - १६ \times १००}$$

$$= ५० \pm \sqrt{२५०० - १६००}$$

$$= ५० \pm \sqrt{९००} = ५० \pm ३० = ८० \text{ या } २०$$

∴ गाय का क्रय मूल्य ८० रु० अथवा २० रु० है। उत्तर

उक्त क्रिया से निम्न आवश्यक फल प्राप्त हुए :—

(१) $क्र० मू० = ५० \pm \sqrt{५०^२ - वि० मू० \times १००}$

जबकि हानि उतने ही प्रतिशत हो जितना कि वस्तु का क्रय मूल्य है।

(२) $क्र० मू० = -५० \pm \sqrt{वि० मू० \times १०० + ५०^२}$

जबकि लाभ उतने ही प्रतिशत हो जितना कि वस्तु का क्रय मूल्य है।

सूचना:—जब कभी उत्तर ऋण संख्या हो (जैसे −९) तो उसे छोड़ दिया जाता है क्योंकि अंकगणित में ऋण संख्याएँ नहीं होतीं।

(७५) यदि राम ने अपनी घड़ी जितने की मोल ली थी उतने ही प्रतिशत हानि से ९ रु० में बेच दी, तो उसका क्रय मूल्य ज्ञात करो।

(७६) यदि हमीद ने अपने घर का कुछ सामान उसके क्रय मूल्य के बराबर प्रतिशत लाभ लेकर ९६ रुपये में बेच दिया तो क्रय मूल्य ज्ञात करो।

मिश्रित :—(७७) एक व्यापारी अपने माल पर क्रय-मूल्य से ३०% दाम अधिक रखता है और अपने ग्राहकों को १०% कमीशन देता है। वह कितने प्रतिशत लाभ कमाता है ? (उ० प्र०, १९४४)

(७८) एक व्यापारी ने १०० चीजें ९ शि० २ पेंस में मोल लीं और वि० मूल्य का $\frac{3}{7}$ लाभ प्राप्त किया तो वि० मू० तथा लाभ प्रतिशत बताओ।

(उ० प्र०, १९४६)

(७९) एक व्यापारी १० रुपये में ११ चाकू मोल लेता है और ११ रु० में १० चाकू बेच देता है। बताओ वह कितने प्रतिशत लाभ कमाता है।

(उ० प्र०, १९४७)

चौदहवाँ अध्याय

सरल ब्याज

यह एक साधारण अनुभव की बात है कि जब कभी हमको अपने व्यावहारिक जीवन में किसी ऐसी वस्तु या सहायता की आवश्यकता होती है जो अपने को दुर्लभ हो, तो हम उसे कुछ धन देकर प्राप्त करते हैं, उदाहरणतया मकान का किराया, मजदूरी, भाड़ा आदि।

इसी प्रकार धन के सम्बन्ध में भी है। जब कभी हमको किसी दूसरे का धन व्यवहार में लाने की आवश्यकता होती है तो हमें उसका उपयोग करने के बदले कुछ धन देना होता है, जिसको हम 'ब्याज' कहते हैं।

परिभाषा:—ब्याज वह रुपया है जो किसी का धन कुछ काल तक व्यवहार में लाने के बदले किसी निश्चित दर के अनुसार दिया जाता है।

सूचना :—(१) ब्याज सदैव ऋण की प्रतिशत दर में प्रकट किया जाता है और यदि इसके विरुद्ध निश्चय न किया गया हो, तो वार्षिक देना पड़ता है, अतः प्रतिशत दर प्रकट करते समय प्रायः 'प्रति वर्ष' शब्द नहीं भी लिखे जाते।

(२) सरल ब्याज संक्षेप में स० ब्याज लिखा जाता है।

ऋण पर दिये हुए धन को **'मूलधन'** कहते हैं। मूलधन और जितने काल के लिए वह दिया गया हो उसका ब्याज मिलकर **'मिश्रधन'** कहा जाता है।

प्रति १०० रु० व १०० पौंड के वर्ष भर उपयोग में लाने के बदले जो रुपया दिया जाता है, उसको **'प्रतिशत दर'** कहते हैं।

सूचना :—'प्रतिशत दर' संक्षेप में (%) चिह्न देकर भी प्रकट की जाती है। जितने काल के लिए धन दिया जाय उसे **'समय'** कहते हैं।

समय वह अवधि है जब तक के लिये रुपया उधार दिया गया है।

ब्याज के प्रकार :—

ब्याज दो प्रकार का होता है (१) **सरल** और (२) **चक्रवृद्धि**।

जब किसी समय के लिए केवल मूल धन पर ब्याज निश्चित किया जाता है तो उसे **सरल ब्याज** कहते हैं।

जब ब्याज वाजिब होता है और मूलधन में जोड़ दिया जाता है और फिर उस कुल धन पर ब्याज निश्चित किया जाता है, तो उसे **चक्रवृद्धि ब्याज** कहते हैं।

सूचना :—अभी हम केवल सरल ब्याज की ही चर्चा करेंगे।

प्रश्नावली १४

खंड क—नम्बर १—(१) ६०० रुपये का ३ प्रतिशत दर पर ४ वर्ष का सरल ब्याज निकालो।

क्रिया :—

∵ १०० रु० का १ वर्ष का ब्याज = ३ रु०

∴ १ रु० का १ वर्ष का ब्याज = $\frac{३}{१००}$ रु०

∴ ६०० रु० का १ वर्ष का ब्याज = $\frac{३ \times ६००}{१००}$ रु०

∴ ६०० रु० का ४ वर्ष का ब्याज = $\frac{३ \times ६०० \times ४}{१००}$ ×   **उत्तर**

= ७२ रु०

सूचना :—उक्त उदाहरण से स्पष्ट है कि प्रतिशत दर (द) समय (स) व मूलधन (मू) के गुणनफल को १०० से भाग देकर ब्याज निकाला गया है। अतः हम इससे निम्नलिखित नियम बना सकते हैं :—

नियम :—

दर, समय व मूलधन को गुणा करके १०० से भाग दो। संक्षेप में,

$$\text{सरल ब्याज} = \frac{\text{द} \times \text{स} \times \text{मू}}{१००}$$

सरल ब्याज ज्ञात करो :—

(२) ६६६ रुपये १० आने ८ पाई पर ६ वर्ष के लिये ४ प्रतिशत की दर से।

(३) २३६ पौंड ६ शि० ८ पैं० पर २$\frac{१}{२}$ वर्ष के लिए ३ प्रतिशत की दर से।

(४) ६७१ पौंड ६ शि० ४ पें० पर ७$\frac{१}{२}$ वर्ष के लिए ३$\frac{३}{४}$ प्रतिशत की दर से।

(५) ११५८८ रु० १२ आने पर १ वर्ष ११५ दिन के लिए ५ प्रतिशत की दर से।

संकेत :—एक वर्ष ३६५ दिन का माना जाता है तथा एक मास ३० दिन का।

(६) १५० रु० का १ वर्ष ३ मास के लिए $\frac{३}{४}$ आना प्रति रुपया मासिक की दर से।

(७) १० गिनी का ११७ दिन के लिये ३$\frac{१}{२}$ प्रतिशत की दर से निकटस्थ पेंस तक।

नम्बर २—(८) ५०० रु० का ३ जनवरी से १० अगस्त तक १० प्रतिशत की दर से ब्याज निकालो।

क्रिया :—

सूचना :—जब ब्याज किन्हीं दो तिथियों के बीच के समय के लिए निश्चित करना होता है, तो उनमें से एक प्रायः पहली तिथि को गणना में से निकाल देते हैं, और दूसरी तिथि को गिनते हैं। ऐसी दशा में केवल एक तिथि ही (दोनों) समय की गणना में सम्मिलित करनी चाहिए।

सूचना :—उक्त उदाहरण से स्पष्ट है कि प्रतिशत दर (द) समय (स) व मूलधन (मू) के गुणनफल को १०० से भाग देकर ब्याज निकाला गया है। अतः हम इससे निम्नलिखित नियम बना सकते हैं :—

नियम :—

दर, समय व मूलधन को गुणा करके १०० से भाग दो। संक्षेप में,

$$\text{सरल ब्याज} = \frac{\text{द} \times \text{स} \times \text{मू}}{१००}$$

सरल ब्याज ज्ञात करो :—

(२) ६६६ रुपये १० आने ८ पाई पर ६ वर्ष के लिये ४ प्रतिशत की दर से।

(३) २३६ पौंड ६ शि० ८ पें० पर २$\frac{१}{२}$ वर्ष के लिए ३ प्रतिशत की दर से।

(४) ९७१ पौंड ९ शि० ४ पें० पर ७$\frac{१}{२}$ वर्ष के लिए २$\frac{३}{४}$ प्रतिशत की दर से।

(५) ११५८८ रु० १२ आने पर १ वर्ष ११५ दिन के लिए ५ प्रतिशत की दर से।

संकेत :—एक वर्ष ३६५ दिन का माना जाता है तथा एक मास ३० दिन का।

(६) १५० रु० का १ वर्ष ३ मास के लिए $\frac{३}{४}$ आना प्रति रुपया मासिक की दर से।

(७) १० गिनी का ११७ दिन के लिये २$\frac{१}{२}$ प्रतिशत की दर से निकटस्थ पेंस तक।

नम्बर २—(८) ५०० रु० का ३ जनवरी से १० अगस्त तक १० प्रतिशत की दर से ब्याज निकालो।

क्रिया :—

सूचना :—जब ब्याज किन्हीं दो तिथियों के बीच के समय के लिए निश्चित करना होता है, तो उनमें से एक प्रायः पहली तिथि को गणना में से निकाल देते हैं, और दूसरी तिथि को गिनते हैं। ऐसी दशा में केवल एक तिथि ही (दोनों) समय की गणना में सम्मिलित करनी चाहिए।

उपस्थित उदाहरण में ३ जनवरी को छोड़ कर १० अगस्त तक के दिन समय में गणना करो, तथा फरवरी २८ दिन की मानो।

इस प्रकार कुल दिनों का योगफल

= जनवरी फरवरी मार्च अप्रैल मई जून जुलाई अगस्त
२८ + २८ + ३१ + ३० + ३१ + ३० + ३१ + १०

= २१९ दिन = $\frac{२१९}{३६५}$ वर्ष या $\frac{३}{५}$ वर्ष

अब १०० रु० का एक वर्ष का ब्याज = १० रु०

∴ १ रु० का १ वर्ष का ब्याज = $\frac{१०}{१००}$ रु०

∴ ५०० रु० का १ वर्ष का ब्याज = $\frac{५०० \times १०}{१००}$ रु०

∴ ५०० रु० का $\frac{३}{५}$ वर्ष का ब्याज = $\frac{५०० \times १० \times ३}{१०० \times ५}$ रु०

= ३० रु० उत्तर

सरल ब्याज निकालो :—

(९) १९४० रु० का १४ मार्च से ३१ दिसम्बर तक ५ प्रतिशत की दर से।

(१०) ४४२ पौंड १७ शि० ६ पेंस का ६ फरवरी १९६४ से १८ अप्रैल १९६८ तक $२\frac{१}{१२}$ प्रतिशत की दर से ।

संकेत :—लौंद के वर्ष में फरवरी २९ दिन की होती है।

(११) यदि १२५० पौंड १ अप्रैल को लेकर उसी वर्ष २५ अगस्त को वापस दिए जायँ तो $२\frac{३}{४}$ प्रतिशत की दर से ब्याज बताओ।

(१२) हरी ने १२१३ पौंड १२ शि० ६ पेंस $२\frac{१}{२}$% पर ३ मार्च, १८८० से ७ जून, १८८० तक ब्याज पर लगाये, और वेद ने इतना ही धन ३ जनवरी से उसी वर्ष ३ जुलाई तक के लिए $२\frac{४}{१५}$% पर लगाया, तो बताओ कि उन दोनों के प्राप्त हुए ब्याज में कितना अन्तर रहा।

(१३) एक आदमी का डाकखाने में नीचे लिखा हुआ हिसाब है :—

जमा करने की तिथि	जमा किया हुआ धन
५ जनवरी, सन् १६५०	१०० रु०
१६ मार्च, सन् १६५०	४६ रु० ८ आ०
१२ अगस्त, सन् १६५०	३१ रु०

यदि ब्याज की दर २½% वार्षिक हो तो बताओ कि ३१ दिसम्बर, सन् १६५० को उसे क्या मिलना चाहिये। उत्तर निकटतम पाई तक ज्ञात करो।

नम्बर ३—(१३) ३९६८ रु० १२ आने का ४% की दर से २½ वर्ष पश्चात् मिश्रधन बताओ।

क्रिया :—

∵ १०० रु० का १ वर्ष का ब्याज $= ४$ रु०

∴ १०० रु० का ४½ वर्ष का ब्याज $= ४ \times ४\frac{१}{२}$ रु०

$= १८$ रु०

∴ १०० रु० का ४% की दर से ४½ वर्ष पश्चात् मिश्रधन

$= (१०० + १८) = ११८$ रु०

जबकि मूलधन १०० रु० है तो मिश्रधन $= ११८$ रु०

∴ जब मूलधन १ रु० है तो मिश्रधन $= \frac{११८}{१००}$ रु०

∴ जब मूलधन $\frac{१५८७५}{४}$ रु० है तो मिश्रधन $= \frac{१५८७५ \times ११८}{४ \times १००}$ रु०

$= \frac{३७४६५}{८}$ रु०

$= ४६८३$ रु० २ आ० **उत्तर**

नियम :—दर और समय को गुणा करो; इस गुणनफल को १०० से भाग दो; इस प्रकार प्राप्त भागफल में १ जोड़ो, फिर मिश्रधन ज्ञात करने के लिए इस योगफल को मूलधन से गुणा करो।

संक्षेप में, $$\text{मिश्रधन} = \text{मू०} \times \left(१ + \frac{\text{स} \times \text{द}}{१००}\right)$$

मिश्रधन ज्ञात करो :—

(१४) ३२९ पौंड ६ शि० ४$\frac{१}{२}$ पेंस का ३·२५% की दर से ७ वर्ष २ मास पश्चात् निकटस्थ पैनी तक।

(१५) २३० रु० ५ पा० का २२ मार्च से १३ नवम्बर तक ४% की दर से।

(१६) यदि मैं इम्पीरियल बैंक में ४३४३ रु० ५ आ० ४ पा० ४% पर जमा कर दूँ, तो ३ वर्ष ६ मास के पश्चात् मुझे कितना रुपया मिलेगा?

(१७) यदि मैं ३५० पौंड २६ मई को तथा २७० पौंड ७ अगस्त को यह मैं वचन देकर उधार लूँ कि मैं वर्ष के अन्त में कुल धनमें २$\frac{३}{८}$ प्रतिशत ब्याज सहित दूँगा, तो बताओ कि ३१ दिसम्बर को मुझे कितना धन देना होगा।

नम्बर ४—(१८) ३$\frac{१}{२}$ वर्ष में ४$\frac{१}{४}$ % की दर से कितने धन का ब्याज १३ पौं० १२ शि० ८$\frac{१}{२}$ पें० हो जायगा ?

क्रिया :– माना कि मूलधन $= १००$ पौंड

सरल ब्याज $= \frac{\text{द} \times \text{स} \times \text{मू}}{१००}$ पौंड

तब, १०० पौंड का सरल ब्याज $= \frac{१०० \times \frac{७}{२} \times \frac{१७}{४}}{१००}$ पौंड

$= \frac{१०० \times ७ \times १७}{२ \times ४ \times १००} = \frac{११९}{८}$ पौंड

जब ब्याज $\frac{११९}{८}$ पौंड है तो मूलधन $= १००$ पौंड

∴ जब ब्याज १ पौंड है तो मूलधन $= \frac{८ \times १००}{११९}$ पौं

∴ जब ब्याज $\frac{१३०९}{९६}$ पौंड है तो मूलधन $= \frac{१३०९ \times ८ \times १००}{९६ \times ११९}$ पौंड

$= \frac{२७५}{३}$ पौंड $=$ ९१ पौंड १३ शि० ४ पें०

∴ अभीष्ट मूलधन $=$ ९१ पौंड १३ शि० ४ पें० उत्तर

सूचना :—जबकि ब्याज के स्थान पर मिश्रधन दिया हो, तो १०० मूलधन मानकर क्रिया आरम्भ करो।

नियम :—मूलधन १०० को सरल ब्याज से गुणा करके गुणनफल को दर और समय के गुणनफल से भाग देने से प्राप्त हो जाता है।

संक्षेप में,

(अ) **मूलधन** $= \frac{\text{सरल ब्याज} \times १००}{\text{स} \times \text{द}}$, जबकि ब्याज दिया हुआ हो।

(ब) **मूलधन** $= \frac{\text{मिश्रधन} \times १००}{(\text{स} \times \text{द}) + १००}$, जबकि मिश्रधन दिया हुआ हो।

(१९) वह कौनसा धन है जिसका ब्याज ७$\frac{१}{२}$ वर्ष में ४% की दर से ९५१ रुपये ३ आने हो जायगा ?

(२०) ५ प्रतिशत की दर से कितना रुपया सरल ब्याज से किसी काम में लगाया जाय कि प्रत्येक वर्ष उससे १२०० रुपये की आय हो सके ?

(२१) ४% की दर से २५ वर्ष में कितना धन अपने का दुगुना हो जायगा ?

संकेत :—यदि मूलधन १०० रुपये है तो उसका मिश्रधन २०० रुपये होगा।

तब (२०० − १००) = १०० रुपये ही १०० रुपये पर ब्याज होगा।

(२२) निकटस्थ पौंड तक ज्ञात करो कि कोई मनुष्य अपने पुत्र की सोलहवीं वर्ष गाँठ पर कितना धन बैंक में जमा करे कि उसका पुत्र २$\frac{१}{२}$ प्रतिशत ब्याज की दर से अपने युवा होने पर २,००० पौंड प्राप्त करे।

संकेत :—युवा से तात्पर्य है २० वर्ष की आयु में।

(२३) कोई धन प्रतिवर्ष अपने का $\frac{१}{१२}$ बढ़ जाता है और ७ वर्ष में वह ९०२ रुपये ९ आने हो जाता है। तो बताओ वह धन क्या है।

संकेत :—माना कि धन १ रु० है,

तब १ रु० पर १ वर्ष का ब्याज $= \frac{१}{१२}$ रु०

और १ रु० पर ७ वर्ष का ब्याज $= \frac{७}{१२}$ रु०

∴ ७ वर्ष में १ रु० का मिश्रधन $= (१ + \frac{७}{१२}) = \frac{१९}{१२}$ रु०

(२४) किसी मनुष्य ने इतना धन ऋण लिया कि उस पर २½ प्रतिशत दर से १ वर्ष का ब्याज, ३ प्रतिशत दर से उसी धन के १ वर्ष २ मास के ब्याज से ११० रु० कम था तो वह धन बताओ।

नम्बर ५—(२५) ९ वर्ष में किस प्रतिशत दर पर ५४० पौंड का ब्याज १९४ पौंड ८ शि० हो जायगा ?

क्रिया :—५४० पौं० पर ९ वर्ष के लिए ब्याज $= \frac{९७२}{५}$ पौं०

∴ ...... १ वर्ष ...... $= \frac{९७२ \times १}{५ \times ९}$ पौं०

∴ १ पौंड पर १ वर्ष के लिए ब्याज $= \frac{९७२ \times १ \times १ \times १००}{५ \times ९ \times ५४०}$ पौं०

∴ १०० पौंड पर १ वर्ष के लिए ब्याज $= \frac{९७२ \times १ \times १ \times १००}{५ \times ९ \times ५४०}$

$=$ ४ पौंड

∴ अभीष्ट दर $=$ ४% **उत्तर**

नियम :—सरल ब्याज को १०० से गुणा करके मूलधन और समय के गुणनफल से भाग दे देने पर प्रतिशत दर ज्ञात हो जाती है।

संक्षेप में, $द = \frac{सरल\ ब्याज \times १००}{मू \times स}$

(२६) ४ वर्ष १० मास १५ दिन में किस प्रतिशत दर से ९३६ पौं० १३ शि० ४ पैं० का ब्याज २२० पौंड १४ शि० ½ पैं० होगा ?

(२७) किस प्रतिशत दर पर ३० अक्तूबर, १८४३ से ३ जनवरी, १८७६ तक ७०५० पौं० का मिश्रधन १८,४०० पौं० १० शि० हो जायेगा ?

संकेत :—समय की गणना में ८ वर्ष लौंद के होंगे।

(२८) २५ वर्ष में किस प्रतिशत दर से कोई धन अपना तिगुना हो जायगा ?

संकेत :—माना कि धन १०० रु० है।

इसलिए १०० रु० का मिश्रधन $=$ ३०० रु०

∴ १०० रु० पर २५ वर्ष का ब्याज $=$ २०० रु०

सूचना :—जबकि ब्याज के स्थान पर मिश्रधन दिया हो, तो १०० मूलधन मानकर क्रिया आरम्भ करो।

नियम :—मूलधन १०० को सरल ब्याज से गुणा करके गुणनफल को दर और समय के गुणनफल से भाग देने से प्राप्त हो जाता है।

संक्षेप में,

(अ) **मूलधन** $= \frac{\text{सरल ब्याज} \times १००}{\text{स} \times \text{द}}$, जबकि ब्याज दिया हुआ हो।

(ब) **मूलधन** $= \frac{\text{मिश्रधन} \times १००}{(\text{स} \times \text{द}) + १००}$, जबकि मिश्रधन दिया हुआ हो।

(१६) वह कौनसा धन है जिसका ब्याज ७½ वर्ष में ४% की दर से ६५१ रुपये ३ आने हो जायगा ?

(२०) ५ प्रतिशत की दर से कितना रुपया सरल ब्याज से किसी काम में लगाया जाय कि प्रत्येक वर्ष उससे १२०० रुपये की आय हो सके ?

(२१) ४% की दर से २५ वर्ष में कितना धन अपने का दुगुना हो जायगा ?

संकेत :—यदि मूलधन १०० रुपये है तो उसका मिश्रधन २०० रुपये होगा।

तब (२०० − १००) = १०० रुपये ही १०० रुपये पर ब्याज होगा।

(२२) निकटस्थ पौंड तक ज्ञात करो कि कोई मनुष्य अपने पुत्र की सोलहवीं वर्ष गाँठ पर कितना धन बैंक में जमा करे कि उसका पुत्र २½ प्रतिशत ब्याज की दर से अपने युवा होने पर २,००० पौंड प्राप्त करे।

संकेत :—युवा से तात्पर्य है २० वर्ष की आयु में।

(२३) कोई धन प्रतिवर्ष अपने का $\frac{१}{१२}$ बढ़ जाता है और ७ वर्ष में वह ६०२ रुपये ६ आने हो जाता है। तो बताओ वह धन क्या है।

संकेत :—माना कि धन १ रु० है,

तब १ रु० पर १ वर्ष का ब्याज $= \frac{१}{१२}$ रु०

और १ रु० पर ७ वर्ष का ब्याज $= \frac{७}{१२}$ रु०

∴ ७ वर्ष में १ रु० का मिश्रधन $= (१ + \frac{७}{१२}) = \frac{१९}{१२}$ रु०

(२४) किसी मनुष्य ने इतना धन ऋण लिया कि उस पर २½ प्रतिशत दर से १ वर्ष का ब्याज, ३ प्रतिशत दर से उसी धन के १ वर्ष ३ मास के ब्याज से ११० रु० कम था तो वह धन बताओ।

नम्बर ५—(२५) ६ वर्ष में किस प्रतिशत दर पर ५४० पौंड का ब्याज १६४ पौंड ८ शि० हो जायगा ?

क्रिया :—५४० पौं० पर ६ वर्ष के लिए ब्याज $= \frac{९७२}{५}$ पौं०

∴ ...... १ वर्ष ...... $= \frac{९७२ \times १}{५ \times ६}$ पौं०

∴ १ पौंड पर १ वर्ष के लिए ब्याज $= \frac{९७२ \times १ \times १ \times १००}{५ \times ६ \times ५४०}$ पौं०

∴ १०० पौंड पर १ वर्ष के लिए ब्याज $= \frac{९७२ \times १ \times १ \times १००}{५ \times ६ \times ५४०}$

= ४ पौंड

∴ अभीष्ट दर = ४% **उत्तर**

नियम :—सरल ब्याज को १०० से गुणा करके मूलधन और समय के गुणनफल से भाग दे देने पर प्रतिशत दर ज्ञात हो जाती है।

संक्षेप में, $द = \frac{\text{सरल ब्याज} \times १००}{\text{मू} \times \text{स}}$

(२६) ४ वर्ष १० मास १५ दिन में किस प्रतिशत दर से ६३६ पौं० १३ शि० ४ पें० का ब्याज २२० पौंड १४ शि० ६ पें० होगा ?

(२७) किस प्रतिशत दर पर ३० अक्तूबर, १८४३ से ३ जनवरी, १८७६ तक ७०५० पौं० का मिश्रधन १८,४०० पौं० १० शि० हो जायेगा ?

संकेत :—समय की गणना में ८ वर्ष लौंद के होंगे।

(२८) २५ वर्ष में किस प्रतिशत दर से कोई धन अपना तिगुना हो जायगा ?

संकेत :—माना कि धन १०० रु० है।

इसलिए १०० रु० का मिश्रधन = ३०० रु०

∴ १०० रु० पर २५ वर्ष का ब्याज = २०० रु०

(२६) ५ वर्ष में किसी धन का ब्याज अपने मूलधन का ३/८ हो जाता है, तो बताओ कि उसे किस प्रतिशत दर पर लगाया गया है।

(३०) २० वर्ष में किस प्रतिशत दर पर किसी धन का ब्याज मिश्रधन का २/५ हो जायगा।

संकेत :—माना कि मिश्रधन १०० रु० है,

सरल ब्याज मिश्रधन का २/५ या ४० रु० हुआ, और मूलधन =(१००—४०) रु० = ६० रु०

नम्बर ६—(३१) ४ प्रतिशत दर पर कितने समय में ३५० रु० अपने से दुगुने हो जायेंगे ?

क्रिया :—३५० रु० का अभीष्ट समय के लिए ब्याज = ३५० रु०

तथा १०० रु० का १ वर्ष के लिए ब्याज = ४ रु०

$\therefore$ ३५० रु० ... ... $= \frac{४ \times ३५०}{१००}$ रु०

$\therefore \frac{४ \times ३५०}{१००}$ रु० ब्याज है एक वर्ष में

$\therefore$ १ रु० ... $\frac{१००}{४ \times ३५०}$ वर्ष में,

$\therefore$ ३५० रु० ... $\frac{३५० \times १००}{४ \times ३५०}$ वर्ष में,

२५ वर्ष में

$\therefore$ अभीष्ट समय = २५ वर्ष **उत्तर**

नियम :—समय, सरल ब्याज को १०० से गुणा करके उसको मूलधन तथा दर के गुणनफल से भाग दे देने से ज्ञात किया जाता है।

$$\text{संक्षेप में, समय} = \frac{\text{सरल ब्याज} \times १००}{\text{मू} \times \text{द}}$$

(३२) १०% से कितने समय में कोई धन अपने का चौगुना हो जायगा ?

(३३) ५ जुलाई को १५२५ पौंड २½ प्रतिशत से ऋण लिए गये। कुछ समय बाद ७ पौं० १२ शि० ६ पें० ब्याज के दे दिये गये। तो ब्याज देने की तिथि ज्ञात करो।

(३४) निम्नलिखित में फूलांकित स्थानों को भरो :—

संख्या	ब्याज	दर	समय	मूलधन	मिश्रधन
अ	*	३%	१ वर्ष १४६ दिन	रु० आ० पा० २६६६-१०-८	—
ब	—	१२$\frac{१}{२}$%	१ वर्ष ८ मास	२१२५ रु०	*
स	—	*	२५ वर्ष	५० पौं०	१५० पौं०
द	१५६ रु०	६$\frac{३}{४}$%	२$\frac{२}{३}$ वर्ष	*	—
क	—	३$\frac{१}{२}$%	*	३५४६ रु०	७६८३ रु०
ख	*	४%	३ वर्ष ६ मास	१४५ पौं० १५ शि०	—
ग	२७० पौं०	४$\frac{१}{२}$%	८ वर्ष	—	*
घ	—	३$\frac{१}{४}$%	८$\frac{१}{२}$ वर्ष	*	१५३१ रु० ८ आ०
च	—	३$\frac{३}{४}$%	*	१०० पौं०	२०० पौं०
छ	४५ रु०	*	२ वर्ष	—	७६५ रु०

(३५) यदि किसी मनुष्य ने ३% दर से १००० पौं० लगाकर १५ जून को अपने पुत्र की वर्ष गाँठ पर उसका ब्याज १२ पौं० १८ शि० १ पैं० उसे भेंट किया हो तो बताओ कि धन कब जमा किया गया था।

खंड ख—नम्बर ७—(३६) यदि किसी प्रतिशत दर से ४५० पौं० के ४ वर्ष में ५४० पौं० हो जाते हैं, तो बताओ कि उसी दर पर ५ वर्ष में कितना धन ६३७ पौं० १० शि० हो जायगा।

क्रिया :—

सूचना :—हमको वह दर ज्ञात करनी है जिससे कि ४५० पौं० ४ वर्ष में ५४० पौं० हो जाते हैं।

मिश्रधन = ५४० पौं० , मूलधन = ४५० पौं०

$\therefore$ सरल ब्याज = (५४० − ४५०) = ९० पौं०

$$\text{किन्तु दर} = \frac{\text{सरल ब्याज} \times १००}{\text{मू} \times \text{स}}$$

$$= \frac{९० \times १००}{४५० \times ४} = ५$$

$\therefore$ अभीष्ट दर = ५%

अब प्रश्न यह है कि ५ वर्ष में ५% दर पर कितना धन ६३७ पौं० २० शि० हो जायगा।

$$\therefore \text{मूल} = \frac{\text{मिश्रधन} \times १००}{\text{स} \times \text{द} + १००} = \frac{१२७५ \times १००}{२ (५ \times ५ + १००)} = \frac{१२७५००}{२५०} = ५१० \text{पौंड}$$

$\therefore$ अभीष्ट धन = ५१० पौं० **उत्तर**

(३७) ५ प्रतिशत दर से ४ वर्ष में कितने रुपये का उतना ही ब्याज होगा जितना कि ३% की दर से ६ वर्ष में २५० रुपये का है ?

संकेत :—पहले ३% से २५० रुपये का ६ वर्ष का ब्याज निकालो। यही धन ५% की दर से ४ वर्ष में अभीष्ट मूलधन का ब्याज होगा।

(३८) ३$\frac{१}{२}$% की दर से १० वर्ष में कितने मूलधन का मिश्रधन ४२५ पौं० १९ शि० ४$\frac{४}{५}$ पैंस हो जायगा और इसके कितने समय पश्चात् वही धन ४५३ पौं० ११ शि० ७ पैं० हो जायगा ?

(३९) यदि ४ वर्ष में १२६० रुपये का मिश्रधन १४७० रुपये हो जाता है तो बताओ कि उसी दर से कितने रुपये का मिश्रधन ५ वर्ष में २,००० रुपये हो जायगा।

संकेत :—हमको प्रथम प्रतिशत दर ज्ञात करनी चाहिये जिससे कि १२६० रु० ४ वर्ष में १४७० रु० हो जाते हैं। अब यही दर प्रतिशत वह दर होगी जिस पर कि ५ वर्ष में कोई धन २,००० रु० हो जाता है।

(४०) १६६ पौं० १३ शि० ४ पैंस से ४$\frac{१}{२}$ वर्ष में उतना ही ब्याज मिलता है जितना कि २५० पौं० से ३$\frac{३}{४}$% की दर से ४ वर्ष में। तो बताओ कि पहली दशा में प्रतिशत ब्याज की दर क्या है।

(४१) कोई धन १५ वर्ष में अपने से दूना हो जाता है तो बताओ कि वह तिगुना कितने समय में हो जायगा।

संकेत :—१५ वर्ष में १०० रु० का ब्याज = १०० रु०

१ वर्ष ... ... = $\frac{१००}{१५}$ = $\frac{२०}{३}$ रु०

अतः प्रतिशत दर = ६$\frac{२}{३}$

अब प्रश्न यह है कि १०० रुपये ६$\frac{२}{३}$% दर से कितने समय में ३०० रुपये हो जायेंगे।

(४२) ५०० पौं० का मिश्रधन किस दर से उतने समय में ७०० पौं० हो जायगा, जितने में कि ४% की दर से १२० पौं० का ब्याज १५ पौं० प्राप्त होता है ?

(४३) ६$\frac{२}{३}$ वर्ष में मूलधन और ब्याज मिलकर ६६० पौं० हो जाते हैं किन्तु ब्याज मूलधन का $\frac{२}{९}$ है। तो मूलधन और दर ज्ञात करो।

संकेत :—ब्याज = मूलधन का $\frac{२}{९}$

∴ मूलधन तथा ब्याज का अनुपात = ९ : २

१०

अब ६६० पौं० को ९ : २ के अनुपात में बाँटने से

मूलधन = ६६० पौं० का $\frac{९}{११}$ = ५४० पौं०
और ब्याज = ६६० पौं० का $\frac{२}{११}$ = १२० पौं०

(४४) ४ वर्ष में किसी धन का मूलधन और ब्याज ७७० रुपये हो जाता है। यदि ब्याज मूलधन का $\frac{४}{७}$ हो तो मूलधन और ब्याज की दर ज्ञात करो।

नम्बर ८—(४५) जकी ने २ वर्ष के लिये अकबर को ३०० रुपये तथा जाहिद को ४ वर्ष के लिए ७५ रुपये ऋण दिए और ६० रुपये उनसे ब्याज प्राप्त किया, तो ब्याज की दर बताओ।

क्रिया :—

३०० रु० का २ वर्ष का ब्याज = ६०० रु० का एक वर्ष का ब्याज
और ७५ रु० का ४ वर्ष का ब्याज = ३०० रु० का १ वर्ष का ब्याज

∴ ३०० रुपये का २ वर्ष का ब्याज और ७५ रु० का ४ वर्ष का ब्याज
= (६०० + ३००) रु० का १ वर्ष का ब्याज = ९०० रु० का १ वर्ष का ब्याज

प्रश्न में दी हुई शर्त के अनुसार,

९०० रु० का १ वर्ष का ब्याज = ६० रु०

∴ १ रु० का १ वर्ष ... = $\frac{६०}{९००}$ रु०

∴ १०० रु० का १ वर्ष ... = $\frac{६० \times १००}{९००}$ रु०

= $\frac{२०}{३}$ = ६$\frac{२}{३}$ रु०

∴ अभीष्ट दर = ६$\frac{२}{३}$% उत्तर

(४६) किसी व्यक्ति ने ६२५ पौं० ४ वर्ष के लिये अ को, ३०० पौं० ५ वर्ष के लिये ब को, तथा ८२० पौं० २ वर्ष के लिए स को ऋण दिये, और उन पर २८२ पौं० ब्याज प्राप्त किया। तो बताओ कि ब्याज की दर क्या है और उनमें से प्रत्येक ने कितना ब्याज दिया।

(४७) क २ वर्ष के लिए ख को ३,६०० रुपये उधार देता है, और उसी दर पर ग को ३ वर्ष के लिए २,४०० रुपये देता है। यदि उनसे उसने ५७६ रु० ब्याज प्राप्त किया हो तो ब्याज की दर बताओ।

(४८) मैंने ३६० रु० ब, तथा ४८० रुपये स को ६% की दर से एक ही समय उधार दिए, तो बताओ कि मुझे उनसे ७२ रुपये ब्याज कितने समय बाद मिला।

नम्बर ९—(४९) २०७५ पौंड को ऐसे दो भागों में विभाजित करो कि यदि उनमें एक ५ वर्ष के लिए ३½% ब्याज पर, व दूसरा ४ वर्ष के लिए ३% ब्याज पर लगा दिया जाय तो पहिले मूलधन का ब्याज दूसरे मूलधन के ब्याज से दूना हो।

क्रिया :—माना कि दूसरा मूलधन = १०० पौंड

अब ३% से १०० पौंड का ४ वर्ष का ब्याज = $\text{३} \times \text{४} = \text{१२}$ पौंड

∴ प्रश्न में दी हुई शर्त के अनुसार पहले मूलधन का ब्याज

$= \text{१२} \times \text{२} = \text{२४}$ पौंड

किन्तु ३½% से १०० पौंड का ५ वर्ष का ब्याज $= \text{५} \times \frac{\text{७}}{\text{२}}$ पौं० $= \frac{\text{३५}}{\text{२}}$ पौंड

∴ $\frac{\text{३५}}{\text{२}}$ पौंड ब्याज ५ वर्ष में होता है १०० पौंड का

∴ १ " " " $\frac{\text{२} \times \text{१००}}{\text{३५}}$ पौंड का

∴ २४ " " " $\frac{\text{२} \times \text{१००} \times \text{२४}}{\text{३५}}$ पौंड का

या $\frac{\text{९६०}}{\text{७}}$ पौंड का

∴ वह दोनों मूलधन $\frac{\text{९६०}}{\text{७}}$: १०० या ९६० : ७०० के अनुपात में होने चाहियें। २०७५ पौंड को उक्त अनुपात में विभाजित करने पर

पहला मूलधन $= \text{२०७५}$ का $\frac{\text{९६०}}{\text{१६६०}} = \text{१२००}$ पौंड }
और दूसरा मूलधन $= \text{२०७५}$ का $\frac{\text{७००}}{\text{१६६०}} = \text{८७५}$ पौंड } उत्तर

(५०) २,००० रुपये के ऐसे दो भाग करो कि यदि उनमें एक ६ वर्ष के लिए ३$\frac{१}{२}$% ब्याज पर तथा दूसरा ३ वर्ष के लिए ४$\frac{१}{२}$% ब्याज पर लगा दिया जाय तो पहले का ब्याज दूसरे से दूना हो।

(५१) २५० पौंड के ऐसे दो भाग करो कि यदि उनमें एक ५% तथा दूसरा ६% दर पर लगा दिया जाय तो वार्षिक आय १४ पौं० हो।

खंड ग—नंबर १०—(५२) वह दो मूलधन ज्ञात करो, जिनको यदि २$\frac{१}{४}$ वर्ष के लिए २$\frac{१}{२}$% पर लगा दिया जाय तो उनके ब्याज का योगफल ३० रुपये ३ आने ३$\frac{३}{५}$ पाई हो, और उनके ब्याज का उतने ही समय और उसी दर से अन्तर ६ रु० ५ आ० ८$\frac{२}{५}$ पा० हो।

क्रिया :—

पहले मूलधन का ब्याज + दूसरे मूलधन का ब्याज

= ३० रु० ३ आ० ३$\frac{३}{५}$ पा०

पहले मूलधन का ब्याज – दूसरे मूलधन का ब्याज

= ६ रु० ५ आ० ८$\frac{२}{५}$ पा०

जोड़ने पर,

२ × पहले मूलधन का ब्याज = ३६ रु० ६ आ०

∴ पहले मूलधन का ब्याज = १८ रु० ४ आ० ६ पा०

= $\frac{५८५}{३२}$ रु०

अन्तर करने पर,

२ × दूसरे मूलधन का ब्याज = २३ रु० १३ आने ७$\frac{१}{५}$ पा०

∴ दूसरे मूलधन का ब्याज = ११ रु० १४ आने ६$\frac{३}{५}$ पा०

= $\frac{४७७}{४०}$ रु०

२$\frac{१}{२}$% से १०० रु० का २$\frac{१}{४}$ वर्ष का ब्याज = $\frac{४५}{८}$ रु०

∴ जबकि ब्याज $\frac{४५}{८}$ रु० है तो मूलधन = १०० रु०

∴ जब कि ब्याज १ है तो मूलधन $= \frac{१०० \times ८}{४५}$ रु०

" $\frac{५८५}{३२}$ " $= \frac{५८५ \times १०० \times ८}{३२ \times ४५} =$ ३२५ रु०

फिर जब $\frac{४५}{८}$ रु० ब्याज है तो मूलधन = १०० रु०

∴ $\frac{४७७}{४०}$ रु० " $= \frac{४७७ \times १०० \times ८}{४० \times ४५} =$ २१२ रु०

∴ दोनों अभीष्ट धन = ३२५ रु० तथा २१२ रु० उत्तर

नियम :—जब दो संख्याओं का योगफल और अन्तर दिया हो तो उनमें बड़ी, उनके योगफल और अन्तर के योगफल के आधे और छोटी उनके योगफल तथा अन्तर के अन्तर के आधे के बराबर होती है।

संक्षेप में :—यदि क + ख = अ और क − ख = ब

$$\text{तो } क = \frac{अ + ब}{२},\ ख = \frac{अ - ब}{२}$$

(५३) ४% दर से ३ वर्ष के लिए दो मूलधनों के ब्याज का योगफल ४२ पौंड तथा उनका अन्तर ६ पौंड है, तो उन मूलधनों को ज्ञात करो।

(५४) २½% दर से ४ वर्ष के लिए दो मूलधनों के ब्याज का योगफल ३० रु० तथा उनका अन्तर ४ रु० है तो उन मूलधनों को ज्ञात करो।

नम्बर ११—(५५) मैंने मदन को १,००० रु० ऋण दिये, जिसमें कुछ भाग ४% तथा शेष ३% दर पर दिया गया। यदि तीन वर्ष में कुल ब्याज १०२ रु० प्राप्त हुआ हो, तो बताओ कि पहली दर पर मैंने कितना रु० ऋण दिया।

क्रिया:—

यदि मैंने ४% पर कुल धन ऋण दिया होता तो ब्याज १२० रु० प्राप्त होता। किन्तु अब केवल १०२ रु० ही प्राप्त हुआ है। अतः ४% दर पर ब्याज की अधिकता = (१२० − १०२) = १८ रु०। किन्तु यह १८ रु० की बढ़ोतरी दूसरे मूल के ब्याज में कमी करेगी।

∵ ३ रु० की कमी है तो मूलधन = १०० रु०

∴ १ रु० " " = $\frac{१००}{३}$ रु०

∴ १८ रु० " " = $\frac{१८ \times १००}{३}$ रु० = ६०० रु०

∴ ४% दर पर दिया हुआ मूलधन = (१००० − ६००) = ४०० रु० उत्तर

(५६) किसी व्यक्ति ने २४०० पौंड में से कुछ धन ६% पर सरकारी कागज में लगा दिया तथा शेष ४% पर उधार दे दिया और २$\frac{१}{२}$ वर्ष बाद उसे ३१५ पौंड ब्याज प्राप्त हुआ। तो बताओ कि उसने सरकारी कागज में कितना रुपया लगाया।

(५७) कोई व्यक्ति १८०० रु० में से कुछ भाग ४% पर तथा शेष ४$\frac{१}{२}$% पर ऋण लेता है। यदि ४ वर्ष में ३०० रु० उन दोनों धनों पर ब्याज देना हो तो बताओ कि उसने ४$\frac{१}{२}$% की दर से कितना धन लिया।

नम्बर १२—(५८) कोई धन ३ वर्ष में ४१४ रु० ६ आ० तथा ५ वर्ष में ४४० रु० १० आ० हो जाता है तो वह मूलधन और प्रतिशत दर ज्ञात करो।

क्रिया:—

५ वर्ष में किसी मूलधन का मिश्रधन = ४४० रु० १० आ०

और ३ वर्ष में उसी मूलधन का मिश्रधन = ४१४ रु० ६ आ०

या मूलधन + ५ वर्ष का ब्याज = ४४० रु० १० आ०

तथा मूलधन + ३ वर्ष का ब्याज = ४१४ रु० ६ आ०

अन्तर करने पर,

मूलधन पर २ वर्ष का ब्याज = २६ रु० ४ आ०

∴ " ३ " = २६ रु० ४ आ० का $\frac{३}{२}$

= ३९ रु० ६ आ०

किन्तु ३ वर्ष में मिश्रधन = ४१४ रु० ६ आ०

∴ मूलधन = ४१४ रु० ६ आ० — ३९ रु० ६ आ०

= ३७५ रु०

ब्याज = २६ रु० ४ आ० = $\frac{१०५}{४}$ रु०, समय = २ वर्ष

∴ प्रतिशत दर = $\frac{\text{सरल ब्याज} \times १००}{\text{मू} \times \text{स}} = \frac{१०५ \times १००}{४ \times ३७५ \times २} = \frac{७}{२}$

= ३$\frac{१}{२}$ उत्तर

सूत्र :—

क वर्ष के लिए मिश्रधन—ख वर्ष का मिश्रधन = (क — ख) वर्ष का ब्याज

(५९) कोई धन ३ वर्ष में ५४५ पौं० तथा ४ वर्ष में ५६० पौं० हो जाता है। तो मूलधन और ब्याज की दर ज्ञात करो।

(६०) यदि तीन मास में ३१३८ पौं० ३ शि० ६ पें० का ब्याज २७६२ पौं० १३ शि० ६ पें० के ब्याज से ७ पौं० ८$\frac{३}{४}$ पें० अधिक हो तो ब्याज की दर ज्ञात करो।

नम्बर १३ (६१) ५% की दर से ४ वर्ष के पश्चात् दिए जाने वाले ३८७ रु० का ऋण कितना रुपया वार्षिक देकर चुकाया जा सकता है?

क्रिया :—मानो कि वार्षिक दिया जाने वाला धन = १ रु०

कोई ऋण जो ४ वर्ष के बाद चुकाये जाने को है इस प्रकार पहले वर्ष के अन्त में १ रु०, दूसरे वर्ष के अन्त में १ रु०, तीसरे वर्ष के अन्त में १ रु० तथा चौथे वर्ष के अन्त में १ रु० देकर चुकाया जा सकता है।

∴ ४ रु० = ३ वर्ष में १ रु० का मिश्रधन + २ वर्ष में

१ रु० का मिश्रधन + १ वर्ष में १ रु० का मिश्रधन + १ रु०

किन्तु ५% की दर से ३ वर्ष में १ रु० का मिश्रधन = $\frac{११५}{१००}$ रु०

∴ " २ " १ रु० " = $\frac{११०}{१००}$ रु०

∴ " १ " १ रु० " = $\frac{१०५}{१००}$ रु०

∴ कुल धन = ($\frac{११५}{१००} + \frac{११०}{१००} + \frac{१०५}{१००} + १$) रु०

= $\frac{४३०}{१००} = \frac{४३}{१०}$ रु०

किन्तु जब ऋण $\frac{४३}{१०}$ रु० है तो वार्षिक दिये जाने वाला धन = १ रु०

∴ " १ रु० " = $\frac{१०}{४३}$ रु०

∴ " ३८७ रु० " $\frac{३८७ \times १०}{४३}$ रु०

= ९० रु० **उत्तर**

(६२) ४ वर्ष पश्चात् चुकाया जाने वाला २१५० रु० का ऋण ४ बराबर वार्षिक किस्तों में दिया जाने वाला है। यदि रुपया ५% की दर पर लिया गया है, तो प्रत्येक वर्ष दी जाने वाली किस्त बताओ।

(६३) ४ वर्ष पश्चात् ८४८ रु० दिया जाने वाला धन कुछ वार्षिक धन देकर चुकाया जाता है। यदि उस पर ब्याज की दर ४% हो तो बताओ कितना रुपया वार्षिक देने की आवश्यकता होगी।

नम्बर १४—(६४) २३७९ रु० को ऐसे ३ भागों में बाँटो कि २,३ व ४ वर्ष पश्चात् ५% की दर से उन सबके मिश्रधन समान हों।

क्रिया :—पहले भाग का मिश्रधन = $\frac{११०}{१००}$ × पहला भाग

दूसरे भाग का मिश्रधन = $\frac{११५}{१००}$ × दूसरा भाग

तीसरे " = $\frac{१२०}{१००}$ × तीसरा भाग

किन्तु प्रश्न की शर्त के अनुसार यह सभी भाग बराबर हैं,

∴ ११० × पहला भाग = ११५ × दूसरा भाग = १२० × तीसरा भाग

∴ २२ × पहला भाग = २३ × दूसरा भाग = २४ × तीसरा भाग

∴ पहला भाग : दूसरा भाग = २३ : २२

और दूसरा भाग : तीसरा भाग = २४ : २३ = १ : $\frac{२३}{२४}$

= २२ : $\frac{२२ \times २३}{२४}$

= २२ : $\frac{२५३}{१२}$

∴ पहला भाग : दूसरा भाग : तीसरा भाग = २३ : २२ : $\frac{२५३}{१२}$

= २७६ : २६४ : २५३

अब २३७६ रु० को २७६ : २६४ : २५३ के अनुपात में विभाजित करने पर,

पहला भाग = २३७६ रु० का $\frac{२७६}{७९३}$ = ८२८ रु०
दूसरा भाग = २३७६ रु० का $\frac{२६४}{७९३}$ = ७९२ रु०
तीसरा भाग = २३७६ रु० का $\frac{२५३}{७९३}$ = ७५६ रु०
} उत्तर

(६५) २६०२० रु० को ऐसे तीन भागों में विभाजित करो कि ५% ब्याज पर १, २ और ३ वर्ष के पश्चात् उनके मिश्रधन समान हों।

(६६) १७६१ रु० ऐसे तीन भागों में विभाजित करो कि ३, ४ और ५ वर्ष पश्चात् १०% से उन सबके मिश्रधन समान हों।

(६७) किस समय में कोई धन १ पैसा प्रति रुपया मासिक ब्याज की दर से अपने से चौगुना हो जायगा ? (उ० प्र०, १९३६)

पन्द्रहवाँ अध्याय

चक्रवृद्धि ब्याज

ब्याज प्रायः किसी नियमित समय (६ महीने, एक वर्ष, ४ महीने या १ महीना) पर दिया जाता है। परन्तु यदि वह नियमित समय पर न दिया जाय तो कभी-कभी यह-निर्णय होता है कि प्रत्येक नियमित समय के पश्चात् ब्याज मूलधन में जोड़ा जायगा। इस प्रकार पहले नियमित समय में जो मिश्रधन होगा वह दूसरे नियमित समय के लिये मूलधन हो जायगा और दूसरे समय का ब्याज इस नये मूलधन पर लगाया जायगा।

(अ) यदि २००० रु० दो वर्ष के लिए १० प्रति सैकड़ा वार्षिक के हिसाब से ऋण पर दिये जायँ तो दो वर्ष में साहूकार साधारण रीति से ४०० रु० ब्याज पायगा।

(ब) परन्तु यदि ब्याज मूलधन में प्रति नियमित समय (एक वर्ष) के अन्त में जोड़ा जाता है तो पहिले वर्ष का ब्याज जो २०० रु० होता है मूलधन

२००० रु० में जोड़ा जायगा और यह मिश्रधन अर्थात् २२०० रु० दूसरे वर्ष का मूलधन हो जायगा और दूसरे वर्ष का ब्याज इसी मूलधन (२२०० रु०) पर लगाया जायगा।

दूसरे वर्ष का ब्याज $= \frac{२२०० \times १०}{१००}$ रु० या २२० रु० होगा।

$\therefore$ दो वर्ष का ब्याज = २०० रु० + २२० रु० = ४२० रु०

इसी प्रकार दूसरी दशा (ब) में पहली दशा (अ) से अधिक ब्याज देना होता है, और यह ठीक ही है क्योंकि यदि ब्याज नियमित समय पर नहीं दिया गया तो इसका अर्थ है कि यह भी ऋण के रुपयों की भाँति रखा गया है और क्योंकि मूलधन (ऋण के रु०) पर ब्याज दिया जाता है, इसलिए इस पर भी ब्याज देना चाहिए।

जब ब्याज पूरे समय के लिए केवल मूलधन पर लगाया जाता है जैसा (अ) में किया गया है तो उसे सरल ब्याज कहते हैं।

यदि ब्याज प्रति नियमित समय के पश्चात् मूलधन में जोड़ा जाता है और इस प्रकार मूलधन प्रतिवर्ष बढ़ता जाता है और ब्याज इस नये मूलधन पर लगाया जाता है जैसा ऊपर (ब) में किया गया है तो मूलधन पर चक्रवृद्धि ब्याज लगाया जाता है।

यदि कुछ और न दिया गया हो तो यह समझा जाता है कि ब्याज १ वर्ष के अन्त में लिया जाता है।

उपरोक्त बातों को और अधिक स्पष्ट रूप से निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :—

	मूलधन	ब्याज	मिश्रधन
पहले वर्ष के लिये	२००० रु०	२०० रु०	२२०० रु०
दूसरे वर्ष के लिये	२२०० रु०	२२० रु०	२४२० रु०
तीसरे वर्ष के लिये	२४२० रु०	२४२ रु०	२६६२ रु०

आवश्यक परिणाम :—

(१) दो क्रमानुगत वर्षों के मिश्रधनों का अंतर उनमें से पहले वाले वर्ष के मिश्रधन के ब्याज के बराबर होता है।

(२) दो क्रमानुगत वर्षों के ब्याजों का अंतर उनमें से पहले वाले वर्ष के ब्याज के बराबर होता है।

(३) संपूर्ण चक्रवृद्धि ब्याज = अंतिम मिश्रधन—प्रारंभिक मूलधन
= सब वर्षों के ब्याजों का योगफल

चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने की पहली रीति

प्रश्नावली १५

खंड क—नंबर १—(१) ५०० रु० का चक्रवृद्धि ब्याज २ वर्ष के लिए १० प्रतिशत वार्षिक की दर से क्या होगा ?

क्रिया :—मूलधन = ५०० रु०

दर = १० प्रतिशत

पहले वर्ष का ब्याज = $\frac{५००\times१०\times१}{१००}$ = ५० रु०

पहले वर्ष का मिश्रधन = ५०० + ५० = ५५० रु०

दूसरे वर्ष का मूलधन = ५५० रु०

" " " ब्याज = $\frac{५५०\times१०\times१}{१००}$ = ५५ रु०

" " " मिश्रधन = ५५० + ५५ = ६०५ रु०

ब्याज = मिश्रधन − मूलधन

= ६०५—५०० = १०५ रु०

∴ चक्रवृद्धि ब्याज = १०५ रु० उत्तर

विधिः—(अ) पहले वर्ष का ब्याज निकालो और मूलधन में इसको जोड़ो।

(ब) पहले वर्ष का मिश्रधन दूसरे वर्ष के लिए मूलधन होगा।

(स) नये मूलधन पर ब्याज निकालो और नये ब्याज को नये मूलधन में जोड़ो। यह दूसरे वर्ष का मिश्रधन होगा।

(द) दूसरे वर्ष के मिश्रधन में से मूलधन घटाओ। यही अन्तर चक्रवृद्धि ब्याज होगा।

चक्रवृद्धि ब्याज बताओ :—

(२) ६२५ रु० का २ वर्ष में ४ प्रति सैकड़े ब्याज की दर से।
(३) ४०० रु० का २ वर्ष में ५ प्रति सैकड़े ब्याज की दर से।
(४) १०० रु० का २ वर्ष में १० प्रति सैकड़े ब्याज की दर से।
(५) ८०० रु० का २ वर्ष में ५ प्रति सैकड़े ब्याज की दर से।
(६) १००० रु० का ३ वर्ष में १० प्रति सैकड़े ब्याज की दर से।
(७) ६२५ रु० का ४ वर्ष में २० प्रति सैकड़े ब्याज की दर से।

(८) १२५० रुपये का चक्रवृद्धि ब्याज २ वर्ष के लिये ४ प्रतिशत वार्षिक दर से क्या होगा?

(९) १६०० रुपये का चक्रवृद्धि ब्याज २ वर्ष में ५ प्रतिशत वार्षिक दर से निकालो।

(१०) ८००० रुपये का चक्रवृद्धि ब्याज ३ वर्ष के लिए ५ प्रतिशत वार्षिक दर से निकालो।

(११) ४००० रुपये का २ वर्ष के लिये ५ प्रतिशत वार्षिक दर से मिश्रधन और चक्रवृद्धि ब्याज क्या होगा?

(१२) ५००० रु० का चक्रवृद्धि ब्याज २ वर्ष के लिए ४ प्रतिशत वार्षिक दर से निकालो।

चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने की दूसरी रीति

प्रश्नावली १६

खंड क—नम्बर १—(१) ५००० रुपयों का ३ वर्ष का १०% दर से च० वृ० ब्याज निकालो।

क्रिया :—

	रु०	
	५०००	मूलधन
	×१०	ब्याज की दर
१०० से भाग देने पर	५००·००	पहले वर्ष का ब्याज
	+५०००	
	५५००	पहले वर्ष के अंत में
	× १०	मिश्रधन
१०० से भाग देने पर	५५०·००	दूसरे वर्ष का ब्याज
	+५५००	
	६०५०	दूसरे वर्ष के अंत में
	× १०	मिश्रधन
१०० से भाग देने पर	६०५·००	तीसरे वर्ष का ब्याज
	+६०५०	
	६६५५	तीसरे वर्ष के अंत में
	−५०००	मिश्रधन मूलधन
	१६५५	तीनों वर्षों का च० वृ० ब्याज
	१६५५ रु० उत्तर	

इस रीति को दशमलव भिन्न की रीति कहते हैं। और पहली रीति से सुगम है।

दशमलव भिन्न की रीति से चक्रवृद्धि ब्याज निकालो :—

(२) १००० रु० का २ वर्ष का ५ प्रतिशत की दर से।
(३) ५००० रु० का २ वर्ष का ४ प्रतिशत की दर से।
(४) १०००० पौं० का २ वर्ष का ३ प्रतिशत की दर से।
(५) ४००० रु० का ३ वर्ष का १० प्रतिशत की दर से।
(६) १७०० पौं० का ३ वर्ष का ५ प्रतिशत की दर से।
(७) ८०० रु० का २ वर्ष का ५ प्रतिशत की दर से।
(८) १५६२५ पौं० का ३ वर्ष का ४ प्रतिशत की दर से।
(९) ५००० रु० का ४ वर्ष का ५ प्रतिशत की दर से।
(१०) ३१२५० पौं० का ३ वर्ष का ६ प्रतिशत की दर से।

चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने की तीसरी रीति

प्रश्नावली १७

खंड क—नंबर १—(१) ८००० रु० का ३ वर्ष में ५% दर से कितना च० वृ० ब्याज और मिश्रधन होगा।

क्रिया :—१०० रु० का १ वर्ष का ब्याज = ५ रु०

$\therefore$ १ वर्ष के अंत में १०० रु० का मि० ध० = (१०० + ५) रु०

$\therefore$ १ " " १ रु० का मि० ध० $= \left(\frac{१००}{१००} + \frac{५}{१००}\right)$ रु०

$= \left(१ + \frac{५}{१००}\right)$ रु०

$\because$ १ वर्ष के अंत में १ रु० का मि० ध० $= \left(१ + \frac{५}{१००}\right)$ रु०

$\therefore$ २ .... $\left(१ + \frac{५}{१००}\right)$ " " $= \left(१ + \frac{५}{१००}\right)$

$\times \left(१ + \frac{५}{१००}\right)$

$= \left(१ + \frac{५}{१००}\right)^{२}$ रु०

$\therefore$ ३ वर्ष के अंत में १ रु० का मि० धन $= \left(१ + \frac{५}{१००}\right)^{३}$ रु०

$\therefore$ ... ८००० रु० ... $= ८०००\left(१ + \frac{५}{१००}\right)^{३}$ रु०

$= ८०००\left(१ + \frac{१}{२०}\right)^{३}$ रु०

$= ८०००\left(\frac{२१}{२०}\right)^{३}$ रु०

$$= ८००० \times \frac{२१ \times २१ \times २१}{२० \times २० \times २०} \text{ रु०}$$

$$= ९२६१ \text{ रु०}$$

$\therefore$ च० वृ० ब्याज $= ९२६१ - ८०००$

$$= १२६१ \text{ रु०}$$

$\therefore$ मिश्रधन $=$ ९२६१ रु०

च० वृ० ब्याज $=$ १२६१ रु० उत्तर

इससे मिश्रधन ज्ञात करने का निम्नलिखित सूत्र निकलता है :—

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left(१ + \frac{\text{दर}}{१००} \right)^{\text{समय}}$$

सूचना :—यदि उत्तर निकटतम पाई या पैंस तक पूछा गया हो तो ½ या ½ से अधिक पाई या पैंस के लिए १ पाई या पैंस मान लेना चाहिये और यदि पाई या पैंस ½ से कम हो तो उसे छोड़ देना चाहिए।

मिश्रधन ज्ञात करो :—

(२) ६२५ रु० का २ वर्ष में ४ प्रतिशत से।

(३) ४५० रु० का २ वर्ष में ५ प्रतिशत से।

(४) १४२५ पौं० का ३ वर्ष में ४ प्रतिशत से।

(५) ४७५० रु० का ३ वर्ष में ३½ प्रतिशत से।

(६) २५६ रु० का ३ वर्ष में ६¼ प्रतिशत से।

निकटतम पाई या पैंस तक मिश्रधन ज्ञात करो :—

(७) ७०० रु० का ३ वर्ष में ५ प्रतिशत से।

(८) ३७२ रु० का २ वर्ष में ४ प्रतिशत से।

(९) १३३ पौं० ६ शि० ८ पैं० का २ वर्ष में ६ प्रतिशत से।

(१०) २६० पौं० का ३ वर्ष में ५½ प्रतिशत से।

(११) किसी नगर की जन संख्या ४०००० है। यदि प्रति वर्ष १०% आदमी बढ़ते जायँ तो २ वर्ष के अंत में उस नगर की कुल जनसंख्या कितनी होगी ?

संकेत—यह प्रश्न उसी प्रश्न की भाँति निकाला जा सकता है जिसमें मूलधन, दर और समय ज्ञात हों और मिश्रधन पूछा जाय।

(१२) एक नगर की जनसंख्या ३२००० है और आदमियों के बढ़ने की दर ५० प्रति हजार है। तो ३ वर्ष पश्चात् उसकी जनसंख्या कितनी हो जायगी ?

(१३) एक मनुष्य प्रति वर्ष के आरम्भ में १००० रु० निकाल कर ५ रु० सैकड़ा चक्रवृद्धि ब्याज की दर से उधार दे देता है। तो बताओ कि इस प्रकार से ३ वर्ष के अन्त में उसके पास कुल कितना धन हो जायगा।

(१४) एक मनुष्य ने ४२० रु० पंजाब नेशनल बैंक में १ जनवरी सन् १९४२ को जमा किये और इतना ही धन १ जनवरी सन् १९४३ और १ जनवरी सन् १९४४ को जमा किया। यदि चक्रवृद्धि ब्याज की दर ४% हो तो १ जनवरी सन् १९४५ को उसका कुल कितना धन बैंक में होगा ?

नंबर २—(१५) २०० पौं० का १० प्रतिशत की दर से २½ वष का मिश्रधन चक्रवृद्धि ब्याज की दर से ज्ञात करो।

टिप्पणी :—यहाँ पर समय पूरे वर्षों में नहीं है इसलिए दो वर्ष का मिश्रधन निकालने के बाद १ पौं० का मिश्रधन ½ वर्ष के लिये आधी दर से ज्ञात करके दोनों मिश्रधनों को गुणा करना चाहिये। पूरे वर्ष के बाद जितने महीने होंगे उसके हिसाब से ब्याज की दर लेनी चाहिए, जैसे २ वर्ष ३ महीने हों तो ३ महीने के लिये ब्याज की दर दी हुई ब्याज की दर का ¼ लेनी चाहिए क्योंकि ३ महीने १ वर्ष का ¼ भाग है।

पहली रीति

क्रिया :—

	पौंड	
	२००	मूलधन
	×१०	ब्याज की दर
१०० से भाग देने पर	२०·००	पहले वर्ष का ब्याज
	+२००	
	२२०	पहले वर्ष के अंत में मिश्रधन
	×१०	
१०० से भाग देने पर	२२·००	दूसरे वर्ष का ब्याज
	+२२०	
	२४२	दूसरे वर्ष के अंत में मिश्रधन
	×५	ब्याज का दर का $\frac{१}{२}$
१०० से भाग देने पर	१२·१०	ढाई वर्ष का ब्याज
	+२४२	
	२५४·१	ढाई वर्ष के अंत में मिश्रधन
	२५४·१ पौंड = २५४ पौ० २ शि० उत्तर	

इस प्रश्न को सूत्र की सहायता से भी हल कर सकते हैं। जैसे :—

दूसरी रीति

संकेत—यहाँ पर समय पूरे वर्षों में नहीं है, इसलिये सूत्र की सहायता से हम पहले २ वर्ष का मिश्रधन ज्ञात करेंगे।

क्रिया :—

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left(१ + \frac{\text{दर}}{१००}\right)^{\text{समय}}$$

$$\therefore \text{मिश्रधन} = २०० \times \left(१ + \frac{१०}{१००}\right)^{२} \text{ पौं०}$$

$$= २०० \times \left(\frac{११}{१०}\right)^{२} \text{ पौं०}$$

यह मिश्रधन तीसरे वर्ष के लिये मूलधन होगा।

अब १०० पौं० का १ वर्ष का ब्याज = १० पौं०

∴ १०० पौं० का $\frac{१}{२}$............ = ५ पौं०

∴ १०० पौं० का $\frac{१}{२}$ वर्ष का मिश्रधन = (१०० + ५) = १०५ पौं०

∴ १ पौं० .... = $\frac{१०५}{१००}$ = $\frac{२१}{२०}$ पौं०

∴ २०० का २$\frac{१}{२}$ वर्ष का मिश्रधन = २०० × $(\frac{११}{१०})^२$ × $\frac{२१}{२०}$ पौं०

$$= २०० \times \frac{११ \times ११}{१० \times १०} \times \frac{२१}{२०} \text{ पौं०}$$

$$= \frac{२५४१}{१०} \text{ पौं०} = २५४ \text{ पौं० } २ \text{ शि०}$$ उत्तर

मिश्रधन ज्ञात करो :—

(१६) १०० पौं० का २$\frac{१}{२}$ वर्ष में ५ प्रतिशत से।

(१७) ३१२५० रु० का २$\frac{१}{२}$ वर्ष में ४ प्रतिशत से।

(१८) ६७५० पौं० का ३$\frac{१}{२}$ वर्ष में ६$\frac{२}{३}$ प्रतिशत से।

(१९) ५२०८ रु० ५ आ० ४ पाई का २$\frac{१}{२}$ वर्ष में ४ प्रतिशत से।

(२०) ५०४ पौं० १३ शि० ६ पें० का २ वर्ष ४ माह में ४$\frac{१}{२}$% की दर से।

चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करना जब कि ब्याज छःमाही या तिमाही लिया जाता हो

प्रश्नावली १८

खंड ख—नंबर १—(१) ५०० रु० का चक्रवृद्धि ब्याज १$\frac{१}{२}$ वर्ष का १० प्रतिशत वार्षिक दर से क्या होगा जब कि ब्याज हर छः मास के बाद लगता हो ?

क्रिया:—$१\frac{१}{२} = \frac{३}{२}$ वर्ष = ३ आधे वर्ष

मूलधन = ५०० रु०

दर प्रति वर्ष = १० प्रतिशत

दर प्रति अर्ध-वर्ष = $\frac{१०}{२}$ = ५ प्रतिशत

समय = ३ अर्ध-वर्ष

मिश्रधन $= ५०० \times (१ + \frac{५}{१००})^{३}$ रु०

$= ५०० \times (\frac{२१}{२०})^{३}$ रु०

$= ५०० \times \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०} + \frac{२१}{२०}$ रु०

४

$= \frac{९२६१}{१६}$ रु०

∴ चक्रवृद्धि ब्याज $= \left(\frac{९२६१}{१६} - ५००\right)$ रु०

$= \frac{९२६१ - ८०००}{१६} = \frac{१२६१}{१६}$ रु०

= ७८ रु० १३ आ० **उत्तर**

याद रखो :—

जब ब्याज छःमाही देना हो तो जितना समय दिया हुआ हो उसकी छःमाहियाँ बना लो अर्थात् दुगुना कर लो और प्रति सैकड़ा वार्षिक दर को आधा कर लो। इसी प्रकार यदि ब्याज तिमाही दिया हो तो समय की तिमाहियाँ बना लो अर्थात् चौगुना कर लो और प्रति सैकड़ा वार्षिक दर का चौथाई कर लो

चक्रवृद्धि ब्याज निकालो जब कि ब्याज हर ६ महीने में दिया जाता है :—

(२) ४६० रु० का २ वर्ष का ५ प्रति सैकड़ा की दर से।

(३) ७५२ रु० १२ आ० का $१\frac{१}{२}$ वर्ष का ४ प्रति सैकड़ा की दर से

(४) १२७२ रु० १५ आ० का $१\frac{१}{२}$ वर्ष का ५ प्रति सैकड़ा की दर से

(५) ८९ रु० ५ आ० का १ वर्ष का ६ प्रति सैकड़ा की दर से।

(६) ५०० रु० का १½ वर्ष का ५ प्रति सैकड़ा की दर से।

(७) ७०० रुपये का चक्रवृद्धि ब्याज एक वर्ष के लिए १०% वार्षिक दर से ज्ञात करो जबकि ब्याज प्रति ६ मास के पश्चात् लगता हो।

(८) ८५० रुपये का चक्रवृद्धि ब्याज ९ मास के लिए ज्ञात करो जब दर ४% वार्षिक हो और ब्याज प्रति ३ मास के पश्चात् लगता हो।

(९) ६०० रु० का मिश्रधन ६ मास के लिए बताओ जबकि दर ४ प्रतिशत वार्षिक हो और ब्याज प्रति ३ मास के बाद लगता हो।

(१०) ८००० रुपये का चक्रवृद्धि ब्याज १½ वर्ष के लिये १० प्रतिशत वार्षिक दर से ज्ञात करो जबकि ब्याज प्रति छठे महीने लगाया जाय।

(११) ५००० रु० का मिश्रधन ४ प्रतिशत वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज द्वारा एक वर्ष के लिए ज्ञात करो जबकि ब्याज प्रत्येक छठे मास लगाया जाए।

(१२) १००० रु० का १ वर्ष में ५% वार्षिक दर से कितना चक्रवृद्धि ब्याज होगा जबकि ब्याज त्रैमासिक मूलधन में जुड़ जाता हो ?

(१३) २००० पौं० का ६ माह में ४½% वार्षिक दर से कितना चक्रवृद्धि ब्याज होगा यदि ब्याज प्रत्येक तिमाही लिया जाता हो ?

(१४) ६००० पौं० का मिश्रधन ६ माह में ४% ब्याज की दर से क्या होगा यदि ब्याज त्रैमासिक मूलधन में जोड़ा जाय ?

(१५) १००० पौं० का १ वर्ष में २½% की दर से कितना मिश्रधन हो जायगा जबकि ब्याज त्रैमासिक मूलधन में जोड़ा जाता है ?

मूलधन ज्ञात करना

प्रश्नावली १६

खंड ख नंबर १—(१) बताओ किस धन का मिश्रधन ४ वर्ष में १० प्रतिशत चक्रवृद्धि ब्याज की दर से १४६४१ रु० हो जायगा ?

क्रिया :—१०० रु० का १ वर्ष का ब्याज = १० रु०

$\therefore$ १०० रु० का १ वर्ष में मिश्रधन $= (१०० + १०)$

$= ११०$ रु०

$\therefore$ १ रु० ,, ,, $= \frac{११०}{१००} = १\cdot१$ रु०

$\therefore$ १ रु० ,, ४ वर्ष ,, $= (१\cdot१)^४$ रु०

$= १\cdot४६४१$ रु०

$\because$ १·४६४१ रु० मिश्रधन है १ रु० का

$\therefore$ १ रु० ,, $\frac{१}{१\cdot४६४१}$ रु० का

$\therefore$ १४६४१ रु० मिश्रधन है $\frac{१४६४१}{१\cdot४६४१}$ रु० का

$\therefore$ अभीष्ट मूलधन $= १००००$ रु० **उत्तर**

दूसरी विधि :—

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left(१ + \frac{\text{दर}}{१००}\right)^{\text{समय}}$$

$$\text{या, } १४६४१ = \text{मूलधन} \times \left(१ + \tfrac{१०}{१००}\right)^४$$
$$= \text{मूलधन} \times \left(\tfrac{११}{१०}\right)^४$$
$$= \text{मूलधन} \times (१\cdot१)^४$$

$$\text{या, मूलधन} = \frac{१४६४१}{(१\cdot१)^४} \text{ रु०}$$
$$= \frac{१४६४१}{१\cdot४६४१} \text{ रु०}$$
$$= १०००० \text{ रु०}$$

$\therefore$ अभीष्ट मूलधन $= १००००$ रु० **उत्तर**

(२) वह मूलधन ज्ञात करो जो २ वर्ष में ५% से ६२६ रु० १ आ० $७\frac{१}{५}$ पा० हो जाय। (उ० प्र०, १६३४)

(३) कितना धन ऋण पर दिया जाय कि ३ वर्ष में ५ प्रतिशत वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से उसका मिश्रधन ८१० पौं० हो जाय ?

(४) किस धन का मिश्रधन ३ वर्ष में २$\frac{1}{2}$% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से २६७६१ रु० होता है ?

(५) किस धन का मिश्रधन १ वर्ष में ६% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से १०६०६ पौं० होता है यदि ब्याज की दर छःमाही है ?

(६) यदि किसी धन का मिश्रधन ४ वर्ष में ५% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से १००० रु० हो जाता है तो वह धन ज्ञात करो।

(७) राम ने मोटर के कारखाने में कुछ धन लगाया और उसको प्रति वर्ष २०% का लाभ होता रहा। ४ वर्ष पश्चात् उसकी पूँजी २०७३६ रु० है। ज्ञात करो कि उसने कारखाना कितने रुपये से प्रारम्भ किया था।

(८) एक सौदागर ने कुछ पूँजी से लेन-देन आरम्भ किया और प्रतिवर्ष उस उस वर्ष के शुरू में जो धन उसके पास हुआ उस पर ३०% लाभ होता रहा। ३ वर्ष के अन्त में उसके पास २१६७० रु० हो गये। तो उसकी असली पूँजी बताओ।

(९) जन-गणना प्रत्येक १० वर्ष के उपरान्त होती है। उस समय यह प्रतात हुआ कि एक नगर की जन-संख्या प्रत्येक जन-गणना के समय २०% बढ़ जाती है। यदि सन् १९०१ में उस नगर की जन-संख्या ३७६३२ थी तो उसकी जन-संख्या सन् १८९१ और १८८१ में क्या थी ?

(१०) वह कौन-सा धन है जिसका मिश्रधन ३ वर्ष में १८६५ रु० ८ आ० हो जायगा यदि पहले वर्ष में ब्याज की दर २$\frac{1}{2}$%, दूसरे में ४% और तीसरे में ५% हो ?

नंबर २—(११) ५% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से कितने रु० का ३ वर्ष का ब्याज २५२२ रु० हो जायगा ?

क्रिया :—१०० रु० का १ वर्ष का ब्याज = ५ रु०

$\therefore$ १ रु० „ „ $= \frac{५}{१००}$ रु० $= \frac{१}{२०}$ रु०

$\therefore$ १ रु० का १ वर्ष में मिश्रधन $= \left(१ + \frac{१}{२०}\right)$ रु०

$= \frac{२१}{२०}$ रु०

$\therefore$ १ रु० का ३ वर्ष में मिश्रधन $= \left(\frac{२१}{२०}\right)^{३}$ रु०

$= \frac{९२६१}{८०००}$ रु०

$\therefore$ १ रु० का चक्रवृद्धि ब्याज $= \frac{९२६१}{८०००} - १ = \frac{१२६१}{८०००}$ रु०

$\therefore$ जब ब्याज $\frac{१२६१}{८०००}$ रु० है तो मूलधन = १ रु०

$\therefore$ „ १ रु० „ $= \frac{८०००}{१२६१}$ रु०

$\therefore$ „ २५२२ रु० „ $= \frac{२५२२ \times ८०००}{१२६१}$ रु०

$= १६०००$ रु० **उत्तर**

(१२) २ वर्ष में ५ प्रतिशत दर से कितने धन का चक्रवृद्धि ब्याज २० रु० ८ आ० हो जायगा ?

(१३) ३ वर्ष में १० प्रतिशत दर से कौन से धन का चक्रवृद्धि ब्याज १३२४ रु० हो जायगा ?

(१४) किस मूलधन का चक्रवृद्धि ब्याज २ वर्ष में ६$\frac{१}{४}$ प्रतिशत की दर से ८२ रु० ८ आ० हो जायगा ?

(१५) किसी धन का चक्रवृद्धि ब्याज ३ वर्ष में ५ प्रतिशत की दर से ३३१ रु० ० आ० २$\frac{३}{५}$ पा० है, तो उसका सरल ब्याज ज्ञात करो।

संकेत—इस प्रश्न में पहले मूलधन ज्ञात करना चाहिए।

(१६) यदि किसी धन का २ वर्ष में ३ प्रतिशत से चक्रवृद्धि ब्याज ५७ पौं० १ शि० १०$\frac{१}{२}$ पैं० हो तो उसका सरल ब्याज ज्ञात करो।

सरल ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज का अन्तर ज्ञात करना

प्रश्नावली २०

खंड ख नंबर १—(१)४०० रु० के २ वर्ष के ५% की दर से चक्रवृद्धि ब्याज और सरल ब्याज का अन्तर ज्ञात करो।

क्रिया :—सरल ब्याज $= \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{१००}$

$= \frac{४०० \times २ \times ५}{१००} = ४०$ रु०

मिश्रधन (चक्रवृद्धि ब्याज से) $= \text{मूलधन} \times \left(१ + \frac{\text{दर}}{१००}\right)^{\text{समय}}$

$= ४०० \times \left(१ + \frac{५}{१००}\right)^{२}$ रु०

$= ४०० \times \frac{२१}{२०} \times \frac{२१}{२०}$ रु०

$= ४४१$ रु०

∴ चक्रवृद्धि ब्याज $= (४४१ = ४००) = ४१$ रु०

∴ चक्रवृद्धि ब्याज और सरल ब्याज का अन्तर

$= (४१ - ४०)$ रु०

$= १$ रु० **उत्तर**

(२) ४८०० रुपये के ४ वर्ष के ५% प्रतिशत की दर से सरल ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज का अन्तर ज्ञात करो।

(३) २५०० रुपये के २ वर्ष के ६% की दर से चक्रवृद्धि ब्याज और सरल ब्याज का अन्तर ज्ञात करो।

(४) २ वर्ष ३ मास में ५$\frac{१}{३}$ प्रतिशत की दर से १४०६२ पौं० १० शि० के सरल ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज का अन्तर ज्ञात करो।

(५) यदि एक साहूकार ६४० पौंड को २ वर्ष के लिए ७$\frac{१}{२}$ प्रतिशत की दर से सरल ब्याज पर न लगाकर चक्रवृद्धि ब्याज पर लगाए तो उसको कितना लाभ होगा ?

नंबर २—(६) किसी धन के २ वर्ष के ४% की दर से सरल ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज का अन्तर १० पौं० ४ शि० है, तो उस धन को ज्ञात करो।

क्रिया :—माना कि धन १ पौंड है।

$$\text{तो, सरल ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{१००}$$

$$= \frac{१ \times ४ \times २}{१००} = \frac{२}{२५} \text{ पौं०}$$

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left(१ + \frac{\text{दर}}{१००} \right)^{\text{समय}}$$

$$= १ \times \left(१ + \frac{४}{१००}\right)^{२} \text{ पौं०}$$

$$= १ \times \frac{२६}{२५} \times \frac{२६}{२५} \text{ पौं०}$$

$$= \frac{६७६}{६२५} \text{ पौं०}$$

$$\therefore \text{ चक्रवृद्धि ब्याज} = \left(\frac{६७६}{६२५} - १ \right) = \frac{५१}{६२५} \text{ पौं०}$$

∴ चक्रवृद्धि ब्याज और सरल ब्याज का अन्तर

$$= \frac{५१}{६२५} - \frac{२}{२५} = \frac{५१ - ५०}{६२५} = \frac{१}{६२५} \text{ पौं०}$$

∵ जब अन्तर $\frac{१}{६२५}$ पौं० है तो धन = १ पौं०

∴ " १ पौं० " = ६२५ पौं०

∴ " $\frac{५१}{५}$ पौं० " $= \frac{६२५ \times ५१}{५} = ६३७५$ पौं०

∴ अभीष्ट धन = ६३७५ पौं० **उत्तर**

सूत्र

$$\text{मूलधन} = \frac{\text{ज्ञात अन्तर}}{\text{१ पौं० पर अंतर}}$$

(७) वह धन ज्ञात करो जिसके २ वर्ष के चक्रवृद्धि और सरल ब्याज में ५% की दर से १५ रुपये का अन्तर हो। (उ० प्र०, १९३७)

(८) किस धन के ४½ प्रतिशत की दर से २ वर्ष में सरल ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज में १ पौं० १३ शि० ९ पें० का अन्तर हो जायगा ?

(९) किसी धन के १५ प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से २ वर्ष के सरल ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज का अन्तर ६ रु० है। तो उस धन को ज्ञात करो।

(१०) किस धन का चक्रवृद्धि ब्याज २ वर्ष में ३ प्रतिशत की दर से उसी समय और दर से उसी धन पर ज्ञात किए गए सरल ब्याज से ३ पौं० ७ शि० ६ पें० अधिक होगा ?

(११) यदि मैं कुछ धन ३ वर्ष के लिए ६⅔ प्रतिशत की दर से सरल ब्याज पर न लगाकर चक्रवृद्धि ब्याज पर लगाऊँ तो मुझको ४६ रु० का लाभ होता है। तो धन ज्ञात करो।

(१२) किसी धन का २ वर्ष का २¾ प्रतिशत से सरल ब्याज उसी धन के चक्रवृद्धि ब्याज से ३४ रु० २ आ० ९ पा० कम है। तो धन ज्ञात करो।

(१३) यदि किसी धन को ३ वर्ष के लिए ४ प्रतिशत की दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर न लगाकर सरल ब्याज पर लगाया जाय तो ७६ पौं० की हानि रहती है। तो बताओ वह धन कितना है।

नंबर ३—(१४) रमेश ने कोई धन चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार लिया और वचन दिया कि २ वर्ष में १५०० रु० या ३ वर्ष में १६५० रु० चुका दूँगा। बताओ उसने कितना धन कितनी दर से उधार लिया था।

टिप्पणी :—ब्याज निकालने की क्रिया।

२ वर्ष का मिश्रधन तीसरे वर्ष का मूलधन होता है।

∴ १५०० रु० का १ वर्ष का मिश्रधन = १६५० रु०

∴ १५०० रु० का १ वर्ष का सरल ब्याज = (१६५० – १५००) रु०

= १५० रु०

क्रिया :—(१)

$$\therefore \text{दर} = \frac{\text{ब्याज} \times १००}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$$

$$= \frac{१५० \times १००}{१५०० \times १}$$

$$= १०\%$$

क्रिया :—(२)

∵ १५०० रु० का १ वर्ष का ब्याज = १५० रु०

∴ १०० रु० का १ वर्ष का ब्याज

$$= \frac{१०० \times १५०}{१५००} = १० \text{ रु०}$$

∴ ब्याज की दर = १०%

अब वह धन ज्ञात करना चाहिए जिसका मिश्रधन २ वर्ष में १०% से १५०० रु० हो जायगा।

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left(१ + \frac{\text{दर}}{१००}\right)^{\text{समय}}$$

$$\therefore १५०० = \text{मूलधन} \times \left(१ + \frac{१०}{१००}\right)^{२}$$

$$= \text{मूलधन} \times \left(\frac{११}{१०}\right)^{२}$$

$$= \text{मूलधन} \times \frac{१२१}{१००}$$

$$\therefore \text{मूलधन} = \frac{१५०० \times १००}{१२१} \text{ रु०}$$

= १२३९ रु० १० आ० ६ पा० लगभग
और दर = १०% } उत्तर

(१५) कोई धन चक्रवृद्धि ब्याज से २ वर्ष में १७६०४ रु० २ आ० ८ पा० हो जाता है और ३ वर्ष में १८३०८ रु० ५ आ० ४ पा० हो जाता है तो धन और दर ज्ञात करो।

(१६) एक धन चक्रवृद्धि ब्याज से पहले वर्ष के अन्त में ६५० रु० और दूसरे वर्ष के अन्त में ६७६ रु० हो जाता है। तो वार्षिक दर और मूलधन बताओ।

(१७) चक्रवृद्धि ब्याज की दर से किसी धन का १ वर्ष का ब्याज १४५ रु० १३ आ० ४ पा० है और दूसरे वर्ष का ब्याज १५३ रु० २ आ० है तो तीसरे वर्ष का ब्याज ज्ञात करो।

संकेत :— दोनों ब्याजों का अन्तर पहले वर्ष के ब्याज का १ वर्ष का ब्याज है।

या (१५३ रु० २ आ० — १४५ रु० १३ आ० ४ पा०) = १४५ रु० १३ आ० ४ पा० के १ वर्ष के ब्याज के।

(१८) कोई धन २ वर्ष में १४७ पौं० और ३ वर्ष में १५४ पौं० ७ शि० हो जाता है। तो दर और धन ज्ञात करो।

(१९) यदि किसी धन को चक्रवृद्धि ब्याज पर लगाया जाय तो उसका २ वर्ष में मिश्रधन २११२५ रु० और ३ वर्ष में मिश्रधन २१९७० रु० हो जाता है। तो ब्याज की दर और धन ज्ञात करो।

(२०) किसी धन का २ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज १०२ रु० है और सरल ब्याज १०० रु०। तो धन और ब्याज की दर ज्ञात करो।

[संकेत :—२ वर्ष का सरल ब्याज = १०० रु०।

∴ १ वर्ष............... = ५० रु०

∴ पहले वर्ष का ब्याज = ५० रु०

और दूसरे वर्ष का ब्याज = (१०२ — ५०) रु० = ५२ रु०

∴ (५२ — ५०) या २ रु० ब्याज है ५० रु० का १ वर्ष का।]

चक्र-वृद्धि-ब्याज पर कुछ कठिन प्रश्न

प्रश्नावली २१

खंड ग नम्बर १—(१) किसी गाँव की जनसंख्या २०००० है, और प्रति वर्ष यहाँ १०% की वृद्धि होती है, तो बताओ ३ वर्ष के अन्त में यहाँ की जनसंख्या क्या होगी।

टिप्पणी :—उक्त प्रश्न चक्रवृद्धि ब्याज के प्रश्न में परिवर्तित किया जा सकता है जिसमें कि मूलधन, समय और दर अंकित हों तथा मिश्रधन ज्ञात करना हो।

क्रिया :—

मान लिया आरम्भिक जनसंख्या १ है,

$$\text{तो ३ वर्ष के उपरान्त जनसंख्या} = १ \times \left(१ + \frac{१०}{१००}\right)^{३}$$

$$= \left(\frac{११}{१०}\right)^{३}$$

$$\therefore \text{कुल जनसंख्या} = २०००० \times \left(\frac{११}{१०}\right)^{३}$$

$$= \frac{२०००० \times ११ \times ११ \times ११}{१० \times १० \times १०}$$

$$= २६६२०$$ उत्तर

(२) यदि किसी नगर की जनसंख्या ६४,००० है, तथा वह १०% की दर से वार्षिक बढ़ती है, तो बताओ कि उसमें ३ वर्ष के उपरान्त कितनी जन-संख्या हो जावेगी।

(३) किसी नगर की जनसंख्या प्रतिवर्ष कुछ प्रतिशत बढ़ जाती है, और इस समय वह १९४४८१ है, तथा अब से ४ वर्ष पूर्व यह १६०००० थी, तो बताओ कि वह अगले २ वर्ष में कितनी हो जावेगी।

नम्बर २—(४) एक मनुष्य ने ५% च० वृ० व्याज की दर से कुछ ऋण लिया और उसको ८८२० रु० वार्षिक देकर २ वर्ष में चुकाने का वचन दिया। बताओ उसने कितना धन ऋण लिया।

क्रिया :—ऋण लिया हुआ धन = वह मूलधन जिसका १ वर्ष में मिश्रधन ८८२० रु० हो जाय + वह धन जिसका **२** वर्ष में मिश्रधन ८८२० रु० हो जाय।

$$\text{किन्तु मिश्रधन} = \text{मू०} \times \left(\frac{१०० + \text{द}}{१००}\right)^{\text{स}}$$

$$\therefore ८८२० \text{ रु०} = \text{मू०} \times \left(\frac{१०० + ५}{१००}\right)^{१} = \text{मू०} \times \frac{१०५}{१००} \text{ रु०}$$

$$\therefore \text{मूलधन} = \frac{८८२० \times १००}{१०५} = ८४०० \text{ रु०}$$

∴ वह मूलधन जिसका १ वर्ष में मिश्रधन ८८२० रु० हो जायगा
= ८४०० रु०

और वह मूलधन जिसका २ वर्ष में मिश्रधन ८८२० रु० हो जायगा

$$= \frac{८८२० \times १०० \times १००}{१०५ \times १०५} = ८००० \text{ रु०}$$

∴ ऋण लिया हुआ धन = (८४०० + ८०००) रु०
= १६४०० रु० **उत्तर**

(५) एक मनुष्य ने कुछ धन उधार लिया जिसको उसने ४% च० वृ० ब्याज की दर पर ४३६४ पौं० की ३ वार्षिक किस्तों में चुकाने का वचन दिया, तो बताओ कि ऋण लिया हुआ धन क्या था।

(६) कुछ धन इलाहाबाद बैंक से उधार लिया गया, और वह ८८२ रु० की दो समान वार्षिक किस्तों में ५% चक्रवृद्धि ब्याज लगाकर चुका दिया गया, बताओ कितना धन उधार लिया गया था।

(७) एक व्यापारी ने कुछ धन एक साहूकार से उधार लिया और उसको ४९१३ रु० की प्रत्येक किस्त के हिसाब से १ समान वार्षिक किस्तों में चुकाने वायदा किया। यदि चक्रवृद्धि ब्याज की दर ६$\frac{१}{४}$% हो तो बताओ उसनेका कितना धन उधार लिया।

(८) मैं एक बैंक में कितना धन जमा करूँ ताकि प्रत्येक वर्ष के अन्त में अगले ३ वर्षों तक २०० रु० उससे लेता रहूँ जबकि चक्रवृद्धि ब्याज ३% वार्षिक की दर से लगाया गया है। (उत्तर निकटतम आने तक होना चाहिये)

नंबर ३—(९) ६३०५ रु० का ऋण जो ३ वर्ष के लिये है तीन समान वार्षिक किस्तों में ५% चक्रवृद्धि ब्याज लगाकर देना है। बताओ प्रत्येक किस्त कितने रुपये की है?

क्रिया :—मान लो कि वार्षिक किस्त १ रु० की है।

तब जो धन उधार लिया गया है
= मूलधन जिसका १ वर्ष में मिश्रधन १ रु० होगा
+ वह मूलधन जिसका २ वर्ष में मिश्रधन १ रु० होगा
+ वह मूलधन जिसका ३ वर्ष में मिश्रधन १ रु० होगा।

अब, मिश्रधन $= \text{मूलधन} \times \left(\frac{\text{१००} + \text{द}}{\text{१००}}\right)^{\text{स}}$

$= \text{मूलधन} \times \left(\frac{\text{१०५}}{\text{१००}}\right)^{\text{१}}$

मूलधन $= \frac{\text{१००}}{\text{१०५}} = \frac{\text{२०}}{\text{२१}}$ रु०

∴ वह मूलधन जिसका १ वर्ष में मिश्रधन १ रु० होता है $= \frac{\text{२०}}{\text{२१}}$ रु०

और „ „ २ वर्ष में „ „ $= \left(\frac{\text{२०}}{\text{२१}}\right)^{\text{२}}$ रु०

$= \frac{\text{४००}}{\text{४४१}}$ रु०

और वह मूलधन जिसका ३ वर्ष में मिश्रधन १ रु० होता है

$= \left(\frac{\text{२०}}{\text{२१}}\right)^{\text{३}}$ रु० $= \frac{\text{८०००}}{\text{९२६१}}$ रु०

∴ कुल धन जो उधार लिया गया था $= \left(\frac{\text{२०}}{\text{२१}} + \frac{\text{४००}}{\text{४४१}} + \frac{\text{८०००}}{\text{९२६१}}\right)$ रु०

$= \frac{\text{२५२२०}}{\text{९२६१}}$ रु०

∴ जब कि उधार लिया धन $\frac{\text{२५२२०}}{\text{९२६१}}$ रु० है तो वार्षिक किस्त

$= \text{१}$ रु०

∴ „ „ „ १ रु० „ $= \frac{\text{९२६१}}{\text{२५२२०}}$ रु०

∴ „ „ ६३०५ रु० „ $= \frac{\text{९२६१} \times \text{६३०५}}{\text{२५२२०}}$ रु०

$= \frac{\text{९२६१}}{\text{४}}$ रु० $=$ २३१५ रु० ४ आ०

∴ वार्षिक किस्त = २३१५ रु० ४ आ० **उत्तर**

(१०) एक मनुष्य ने ८२०० रु० उधार लिये और उनको ५% च० वृ० ब्याज की दर से २ समान वार्षिक किस्तों में चुकाने का वचन दिया। बताओ प्रत्येक किस्त कितने धन की थी ?

(११) १२१६३ रु० १२ आ० का ऋण जो ३ समान किस्तों में चुकाना है, ४% च० वृ० ब्याज पर लिया गया। बताओ प्रत्येक किस्त कितने रुपये की होगी ?

(१२) एक कम्पनी १६५८७७५ रु० इस शर्त पर उधार लेती है, कि प्रत्येक वर्ष के अन्त में मूलधन का कुछ भाग अदा कर दिया जायगा, और साथ में ४ प्रति सैकड़ा की दर से उस मूलधन पर जो उसे वर्ष में शेष देना है ब्याज भी दिया जायगा। इस प्रकार वह ऋण ४ समान वार्षिक किस्तों में चुका दिया जायगा। बताओ वार्षिक किस्त कितने की है।

(१३) कुछ धन प्रति वर्ष ३ लगातार वर्षों तक पंजाब नेशनल बैंक में जमा किया जाता है। तीसरे वर्ष के अन्त में ज्ञात होता है कि जमा करने वाले के नाम में ३३१० पौं० २ शि० ६ पें० जमा है। यदि चक्रवृद्धि ब्याज की दर ५% हो तो बताओ प्रत्येक वर्ष कितना धन जमा किया गया।

नम्बर ४—(१४) ६३७५ रु० को क और ख में इस प्रकार बाँटो कि ३ वर्ष पश्चात् क का भाग ख के २ वर्ष पश्चात् के भाग के बराबर हो यदि वे अपने-अपने धन को ४% की दर से च० वृ० ब्याज पर लगा दें।

क्रिया :—$(\text{क का भाग})\left(१+\frac{४}{१००}\right)^{३} = (\text{ख का भाग})\left(१+\frac{४}{१००}\right)^{२}$

$$\therefore \frac{\text{क का भाग}}{\text{ख का भाग}} = \left(\frac{२६}{२५}\right)^{२} \div \left(\frac{२६}{२५}\right)^{३} = \frac{२५}{२६}$$

$\therefore$ क का भाग : ख का भाग $= २५ : २६$

समानुपाती भागों का योगफल

$= २५ + २६ = ५१$

$\therefore$ क का भाग $=$ ६३७५ का $\frac{२५}{५१} =$ ३१२५ रु० }

$\therefore$ ख का भाग $=$ ६३७५ का $\frac{२६}{५१} =$ ३२५० रु० } उत्तर

(१५) ३६०३ रु० किचलू और सपरू में इस प्रकार बाँटो कि ७ वर्ष पश्चात् किचलू का भाग ६ वर्ष पश्चात् सपरू के भाग के बराबर हो यदि च० वृ० ब्याज की दर ४% हो।

(१६) ६३०५ रु० को तीन भागों में इस प्रकार बाँटो कि ५% च० वृ० ब्याज से क्रमशः २, ३ और ४ वर्ष पश्चात् उनके मिश्रधन बराबर हों।

(१७) कुमार और प्रदीप में, जिनकी आयु २३ और २४ वर्ष है, पिता १२७५० रु० का धन इस प्रकार बाँटता है कि यदि दोनों के भाग ४% की दर से च० वृ० ब्याज पर लगा दिये जायें तो २६ वर्ष की आयु होने पर उनको बराबर धन मिलेगा। बताओ कि उन दोनों को अब और २६ वर्ष की आयु होने पर कितना-कितना धन मिलेगा।

विविध :—(१८) यदि ३००० पौंड के १० वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याज की किसी दर से ५३३३ पौंड ६ शि० ८ पैं० हो जाय तो उसी दर से ५ वर्ष में ३००० पौंड का मिश्रधन क्या होगा?

(१९) एक धन का ४ वर्ष तक कोई अधिकारी नहीं मालूम पड़ा। उस समय के अन्त में ५ प्रतिशत वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से उसका मिश्रधन १४५८६ पौं० १ शि० ६ पैं० हो जाता है। तो प्रारम्भ में धन कितना था?

(२०) किसी नगर की जनसंख्या प्रति वर्ष २% बढ़ती है। जनवरी सन् १९२० में वह ६२,५००,००० थी तो जनवरी सन् १९२४ में वह कितनी हो जायगी?

(२१) एक खान की पैदावार लगातार ५ वर्षों तक ६% कम होती गई। यदि आरम्भ में उस खान का मूल्य २,६४,००० पौं० रहा हो, तो अन्त में उसका मूल्य निकालो और बताओ कि अगले ५ वर्षों में पैदावार कितने प्रतिशत बढ़े कि उसका मूल्य आरम्भ के मूल्य के बराबर हो जावे।

(२२) सिद्ध करो कि $२\frac{१}{२}$% से २ वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याज से मिश्रधन मूलधन का १·०५०६२५ गुना हो जाता है।

(२३) एक साहूकार ४ रु० सैकड़ा वार्षिक ब्याज की दर से कुछ रुपया उधार लेता है और वर्ष के अन्त में ब्याज चुकाता है। उस रुपये को वह ६ रु०

सैकड़ा वार्षिक ब्याज की दर से उधार देता है और उसे अर्द्ध वार्षिक (छःमाही) ब्याज मिलता है, और वह वर्ष के अन्त में चक्रवृद्धि ब्याज चुका लेता है, इस प्रकार से एक वर्ष में वह १०४ रु० ८ आ० लाभ उठाता है। तो बताओ वह कितना धन उधार लेता है।

(२४) किसी धन के साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज में १५ रु० का अन्तर है। यदि समय २ वर्ष और ब्याज की दर ५% वार्षिक हो तो वह धन बताओ। (उ० प्र०, १९३०)।

(२५) किसी धन का २ वर्ष के लिये साधारण ब्याज ४० पौं० है। उसी धन का उसी समय के लिये चक्रवृद्धि ब्याज ४० पौंड १६ शि० है। धन और ब्याज की दर बताओ। (उ० प्र०, १९४२)

(२६) कुछ धन चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार लिया गया और उसको ८८२ रु० की दो समान वार्षिक किस्तों में चुकता कर दिया गया। यदि ब्याज की दर ५% हो तो वह धन बताओ। (देहली बोर्ड, १९४८)

(२७) चार वर्ष पहले एक मनुष्य ने २००० रु० किसी बैंक से ४% वार्षिक ब्याज की दर पर उधार लिये। पहले, दूसरे और तीसरे वर्ष के अन्त में उसने क्रमशः ५०० रु० दिये, अब वह कितने रुपये दे कि उसका हिसा चुकता हो जाय? (देहली बोर्ड, १९५२अ)

सोलहवाँ अध्याय

क्षेत्रफल निकालने की रीति

खण्ड (अ)

आयतों का क्षेत्रफल

१. किसी तल की लम्बाई, चौड़ाई उसका आयात कहलाती है।

कसी साधारण कमरे का फर्श, छत और प्रत्येक दीवार, कागज का तख्ता पुस्तक का प्रत्येक पृष्ठ व किसी सन्दूक का प्रत्येक तल यह सभी आयताकार तल के उदाहरण हैं, और इनका ही प्रस्तुत अध्याय में वर्णन किया जायगा।

क्षेत्र या तल वह स्थान है जो किन्हीं सीमित रेखाओं द्वारा घिरा हुआ हो, और यह उन इकाइयों की संख्या द्वारा नापी जाती है जो उसमें सम्मिलित होती हैं।

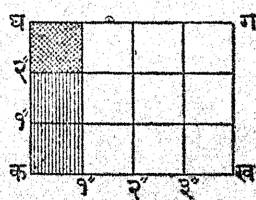
ऐसी प्रत्येक इकाई एक वर्ग होती है, जिसकी भुजाओं की लम्बाई एक इकाई अर्थात् १ गज, १ फुट, व १ इञ्च, इत्यादि में से कोई भी हो सकती है।

अतः किसी वर्ग का क्षेत्रफल जिसकी भुजा १ गज हो, १ वर्ग गज होगा, और यदि १ सेन्टीमीटर हो, तो १ वर्ग सेन्टीमीटर होगा। इत्यादि।

२. लंबाई चौड़ाई ज्ञात होने पर आयत का क्षेत्रफल निकालना।

क्रिया:—कल्पना करो कि क ख ग घ एक आयत है, जिसकी लम्बाई ४ इञ्च और चौड़ाई ३ इंच है।

क ख को ४ समान भागों में विभाजित करो, तथा क घ को ३ समान भागों में। इस प्रकार क ख, और क घ का प्रत्येक भाग १ इंच प्रकट करता है।



अब इन भाजक बिन्दुओं से क ख और क घ के समान्तर रेखाएँ खींचो, जैसा कि चित्र में दिया हुआ है।

इस प्रकार क ख ग घ आयत, १२ समान वर्गों में विभाजित हो गया, जिसमें से प्रत्येक की भुजा १ इंच लम्बी है, और इस कारण उनमें से प्रत्येक का क्षेत्रफल १ वर्ग इंच है।

∴ क ख ग घ का क्षेत्रफल = (×) वर्ग इंच
= १२ वर्ग इंच **उत्तर**

नियम :—यदि किसी आयत की लम्बाई की इकाई की संख्या को उस आयत की चौड़ाई की समान ही इकाइयों से गुणा करें तो गुणनफल उस आयत का क्षेत्रफल उस इकाई वर्ग में प्रकट करेगा।

संक्षेप में :—किसी आयताकार तल का क्षेत्रफल = उसकी लम्बाई × चौड़ाई अर्थात्

(१) क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई
जिसमें,

(२) आयत की लम्बाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}}$

(३) आयत की चौड़ाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लम्बाई}}$

३. वर्ग वह आयत है जिसकी चारों भुजाएँ बराबर हों।
∴ वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा = $(\text{भुजा})^2$
∴ वर्ग की भुजा = $\sqrt{\text{क्षेत्रफल}}$

सूचना :—(१) क्षेत्रफल सर्वदा वर्ग सेन्टीमीटर, वर्ग गज, वर्ग फुट इत्यादि में प्रकट किया जाता है।

(२) ५ वर्ग फुट से उस आयत का क्षेत्रफल प्रकट होता है जो १ वर्ग फुट का ५ गुना है।

(३) ५ फुट वर्ग उस वर्ग को प्रकट करता है जिसकी प्रत्येक भुजा ५ फुट है। इस वर्ग का क्षेत्रफल ५ × ५ या २५ वर्ग फुट होगा।

४. कमरे में फर्श कराना

ऐसे प्रश्नों में जो कमरों में फर्श कराने के सम्बन्ध में हों निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए :—

(१) फर्श आयताकार होता है।

(२) फर्श साधारणतया एक सी चौड़ाई के लपेटों में प्रति गज की दर से बेचा जाता है।

(३) फर्श के आवश्यकतानुसार लम्बे टुकड़े काट लिए जाते हैं (प्रत्येक भाग की लम्बाई कमरे के फर्श की लम्बाई के अनुसार काट ली जाती है।) तथा, उन टुकड़ों की बराबर-बराबर रखकर सी लिया जाता है, जिससे कि फर्श का क्षेत्रफल कमरे के फर्श के बराबर हो जाए।

$$\text{टुकड़ों की संख्या} = \frac{\text{कमरे की चौड़ाई}}{\text{फर्श की चौड़ाई}}$$

$$\text{फर्श की लबाई} = \frac{\text{कमरे का क्षेत्रफल}}{\text{फर्श की चौड़ाई}}$$

$$\text{फर्श का मूल्य प्रति गज} = \frac{\text{फर्श का मूल्य}}{\text{फर्श की लबाई}}$$

सूचना :—यदि कमरे की चौड़ाई फर्श की चौड़ाई से पूरी बार नहीं विभाजित हो, तो फर्श के टुकड़ों की संख्या पूर्ण नहीं होगी। संक्षेप में इस दशा में फर्श का कुछ भाग व्यर्थ जायेगा।

५. कमरे की दीवारों पर कागज मढ़ना

दीवारों पर कागज मढ़ने की क्रिया भी फर्श करने के ही समान है। फिर भी निम्न बातों की जानकारी लाभप्रद होगी :—

(१) कमरे की प्रत्येक दीवार आयताकार होती है।

(२) दीवार मढ़ने का कागज साधारणतया १२ गज लम्बे और २१ इंच चौड़े टुकड़ों में होता है।

(३) प्रत्येक टुकड़े की (कमरे की ऊँचाई के अनुसार लम्बाई में से) पट्टियाँ काट ली जाती हैं तथा यह बराबर रखकर सारी दीवार पर चिपका दी जाती हैं।

$$\text{अभीष्ट कागज की लम्बाई} = \frac{\text{चारों दीवारों का क्षेत्रफल}}{\text{कागज की चौड़ाई}}$$

सूचना :—ऊपर दिए हुए नियम के अनुसार शुद्ध फल प्राप्त नहीं हो सकता, कारण कि कमरे में (अ) दरवाजे, खिड़की, रसोई का स्थान इत्यादि भी होते हैं, जिन्हें विचार में रखना आवश्यक है।

(ब) कभी-कभी कागज के टुकड़ों की पूरी संख्या नहीं ली जा सकती कारण कि वह १२ गज लम्बे होते हैं और इसलिए कुछ कागज बच जाता है। तथा छपे हुए कागज को दूसरे छपे हुए कागज से ठीक स्थान पर जोड़ने में कुछ भाग व्यर्थ हो जाता है। इसलिए जब तक इस सम्बन्ध में कोई सूचना न हो यह कागज की बचत और क्षति बराबर समझनी चाहिए।

प्रश्नावली २२

खंड क—नम्बर १—(१) १३ फुट लम्बे और ११ फुट चौड़े आयत का क्षेत्रफल निकालो।

क्रिया :—किसी आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

किन्तु लम्बाई = १३ फुट और चौड़ाई = ११ फुट

∴ आयत का क्षेत्रफल = १३ × ११ वर्ग फुट

= १४३ वर्ग फुट उत्तर

निम्नलिखित के क्षेत्रफल वर्ग गज, वर्ग फुट और वर्ग इञ्च में निकालोः—

(२) एक बड़े कमरे का जिसकी लम्बाई ६७ फुट ६ इञ्च और चौड़ाई ४० फुट है।

(३) एक चित्र का जो २ फुट ५ इञ्च लम्बा और १ फुट ११ इञ्च चौड़ा है।

(४) एक कमरे का जो ५ गज १० इञ्च लम्बा और ३ गज १ फुट ७ इञ्च चौड़ा है।

(५) एक मैदान का जो १३ जरीब ४० कड़ी लम्बा और १० जरीब २० कड़ी चौड़ा है।

(६) एक आयत का जो अ गज ब फुट लम्बा तथा स फुट चौड़ा है।

नम्बर २—(७) उस कमरे की चौड़ाई ज्ञात करो जो ३६३ वर्ग फुट क्षेत्रफल में है और जिसकी लम्बाई २२ फुट है।

क्रिया :— किसी कमरे की चौड़ाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लम्बाई}}$

किन्तु क्षेत्रफल = ३६३ वर्ग फुट, लम्बाई = २२ फुट

∴ चौड़ाई = $\frac{३६३}{२२}$ = १६$\frac{१}{२}$ फुट

= ५ गज १ फुट ६ इञ्च उत्तर

निम्नलिखित की चौड़ाई ज्ञात करोः—

(८) एक कमरे की जिसका क्षेत्रफल = २८ वर्ग गज और लम्बाई = २१ फुट।

(९) एक सन्दूक के ढक्कन की जिसका क्षेत्रफल = १६ वर्ग गज ४ वर्ग फुट ७२ वर्ग इंच है और लम्बाई = ६ गज २ फुट ३ इंच।

(१०) किसी कमरे की जो ४६ वर्ग गज ६ वर्ग फुट है, और २४ फुट ४ इंच लम्बा है।

(११) एक खेत १६५ गज लम्बा है और उसका क्षेत्रफल $२\frac{१}{४}$ एकड़ है, तो उसकी चौड़ाई ज्ञात करो।

नम्बर ३—(१२) किसी चादर की लंबाई ज्ञात करो, जिसका क्षेत्रफल = ३ वर्ग गज और चौड़ाई १ गज १ फुट है।

क्रियाः—किसी चादर की लम्बाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{चौड़ाई}}$

किन्तु क्षेत्रफल = ३ वर्ग गज, और चौड़ाई = १ गज १ फुट = $\frac{४}{३}$ गज

∴ लम्बाई = $\frac{३}{\frac{४}{३}}$ गज = $\frac{३ \times ३}{४}$ गज

= $\frac{९}{४}$ गज = २ गज ९ इंच उत्तर

(१३) उस आयताकार स्लेट की जिसका क्षेत्रफल = ७७ वर्ग सेन्टीमीटर तथा चौड़ाई = ४४ सेन्टीमीटर है, लम्बाई ज्ञात करो।

(१४) एक मैदान ६ गज १ फुट ७ इंच चौड़ा और क्षेत्रफल में ५६ वर्ग गज १ वर्ग फुट २ वर्ग इंच है। उसकी लम्बाई ज्ञात करो।

(१५) एक आयताकार खेल के मैदान की लम्बाई ज्ञात करो जो क्षेत्रफल में $२\frac{१}{२}$ एकड़ और चौड़ाई में १०० गज है। (फुट में उत्तर निकालो)

(१६) एक भूमि भाग की लम्बाई ज्ञात करो जो क्षेत्रफल में २७·६६०७ एकड़ तथा चौड़ाई में १६ जरीब ६ कड़ी है।

नंबर ४—(१७) एक वर्ग जिसकी भुजा ७ गज २ फुट है क्षेत्रफल में कितना होगा ?

क्रिया :—किसी वर्ग का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^२$

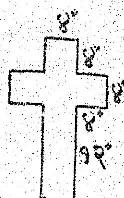
किन्तु वर्ग की भुजा = ७ गज २ फुट = $\frac{२३}{३}$ गज

∴ क्षेत्रफल = $(\frac{२३}{३})^२$ वर्ग गज = $\frac{२३ \times २३}{३ \times ३}$ = $\frac{५२९}{९}$ वर्ग गज

= ५८ वर्ग गज ७ वर्ग फुट उत्तर

(१८) एक वर्ग भूमि भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी भुजा १६ गज १ फुट है।

(१६) उस वर्गाकार भूमि का, जिसकी भुजा २५ जरीब है, २ पौं० १० शि० प्रति एकड़ की दर से क्या लगान देना होगा ?



(२०) एक गिर्जे पर साथ में दिये हुए चित्र की शक्ल का पत्थर लगा हुआ है। नाप इंचों में है, पत्थर का मूल्य २ आना प्रति वर्ग इंच की दर से निकालो।

(२१) किसी वर्ग का परिमाप ५ गज १ फुट ८ इंच है, तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात करो।

सूचना:—'परिमाप' चारों भुजाओं का योगफल होता है।

(२२) एक बन्द घनाकार सन्दूक का क्षेत्रफल बताओ जिसकी कोर ६ इंच है।

संकेत:—एक घनाकार सन्दूक के ६ तल होते हैं जिनमें से प्रत्येक वर्गाकार होता है। यहाँ पर प्रत्येक वर्ग की भुजा ६ इंच है।

नंबर ५—निम्नलिखित सारणी के फूलांकित खानों को भरो :—

नम्बर	नाम वस्तु	लम्बाई	चौड़ाई	क्षेत्रफल
(२३)	चौखटा	१′ ४″	१′ १″	*
(२४)	शीशा	३′ ६″	*	४ वर्ग फुट १३८ वर्ग इंच
(२५)	सन्दूक का ढक्कन	*	३′ ४″	१ वर्ग गज ८ वर्ग फुट ७२ वर्ग इंच
(२६)	वर्गाकार आँगन	८ गज २ फुट	—	*
(२७)	वर्गाकार चित्र	*	*	१०·८६ वर्ग इंच
(२८)	वर्गाकार दरी	—	*	४३·५६ वर्ग गज

नंबर ६—(२६) एक घेर में जो १२ गज २ फुट लंबा तथा १० गज १ फुट चौड़ा है, ईंट का फर्श कराने का व्यय ज्ञात करो जब कि ईंट की लंबाई ६ इंच तथा चौड़ाई ४ इंच है तथा वह ८ आने प्रति दर्जन मिलती हैं।

क्रिया :—घेर की लम्बाई = १२ गज २ फुट = $\frac{३८}{३}$ गज

घेर की चौड़ाई = १० गज १ फुट = $\frac{३१}{३}$ गज

∴ घेर का क्षेत्रफल = $(\frac{३८}{३} \times \frac{३१}{३})$ वर्ग गज

इसी प्रकार एक ईंट का क्षेत्रफल = (६ × ४) वर्ग इंच

$$= \frac{६ \times ४}{१४४ \times ९} \text{ वर्ग गज}$$

किन्तु, $\frac{६ \times ४}{१४४ \times ९}$ वर्ग गज स्थान १ ईंट घेरती है

∴ १ वर्ग गज स्थान $\frac{१४४ \times ९}{६ \times ४}$ ईंटें घेरेंगी

∴ $\frac{३८ \times ३१}{३ \times ३}$ वर्ग गज स्थान $\frac{१४४ \times ९ \times ३८ \times ३१}{६ \times ४ \times ३ \times ३}$ या

४७१२ ईंटें घेरेंगी।

किन्तु १२ ईंटों का मूल्य = $\frac{१}{२}$ रु०

∴ १ " " $= \frac{१}{२ \times १२}$ रु०

∴ ४७१२ " " $= \frac{४७१२}{२ \times १२}$ रु०

= १९६ रुपये ५ आने ४ पाई उत्तर

सूत्र :—ईंटों की संख्या $= \frac{\text{फर्श का क्षेत्रफल}}{\text{ईंट का क्षेत्रफल}}$

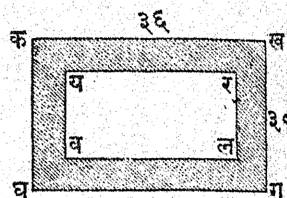
(३०) फर्श के कितने पत्थर जो कि $\frac{३}{४}$ फुट लम्बे तथा $\frac{३}{४}$ फुट चौड़े हैं, एक आयताकार घेर का फर्श करने के लिए आवश्यक होंगे, जिसका विस्तार १०८ फुट × १७ फुट है।

(३१) किसी कमरे का फर्श कराने में जो कि ३० फुट लम्बा तथा १८ फुट चौड़ा है १ फुट ६ इञ्च लम्बे २८८ पत्थर काम आते हैं। तो पत्थर की चौड़ाई ज्ञात करो।

(३२) एक घेर का फर्श कराने में ६ इञ्च वर्ग के आकार वाले १५३६ टाइल काम में आते हैं। तो बताओ कि इससे सतगुने आकार के एक घेर का फर्श कराने के लिए ६ इञ्च × ४½ इञ्च के कितने टाइल्स की आवश्यकता होगी।

खंड ख—नम्बर ७—(३३) एक खेत का आकार ३६ फुट × ३० फुट है। यदि उसमें चारों ओर एक ४ फुट चौड़ा मार्ग हो, तो मार्ग का क्षेत्र-फल निकालो।

क्रिया :—य र, मार्ग की दुगुनी चौड़ाई के बराबर, क ख से कम है, और य व, मार्ग की दुगुनी चौड़ाई के बराबर, क घ से कम है।



इस कारण य र = (३६ − ४ × २) = २८ फुट

और य व = (३० − ४ × २) = २२ फुट

अब मार्ग का क्षेत्रफल = आयत क ख ग घ का क्षेत्रफल − आयत य र ल व का क्षेत्रफल

= (३६ × ३०) वर्ग फुट − (२८ × २२) वर्ग फुट

= १०८० वर्ग फुट − ६१६ वर्ग फुट = ४६४ वर्ग फुट **उत्तर**

सूचना :—(१) यदि मार्ग किसी आयत के भीतर बना हो, तो उसकी लम्बाई तथा चौड़ाई में से मार्ग की चौड़ाई का दुगुना घटा देने पर अन्दर वाले आयत की भुजाएँ ज्ञात की जा सकती हैं।

(२) यदि मार्ग आयत के बाहरी ओर हो, तो उसकी लम्बाई तथा चौड़ाई में मार्ग की चौड़ाई का दुगुना जोड़ देने से बाहरी आयत की भुजाएँ ज्ञात हो सकती हैं।

(३४) एक आयताकार भूमि के मध्य भाग में जिसकी भुजाएँ ७५ फुट तथा ५५ फुट हैं, घास का एक मैदान छोड़ा गया है जो कि २½ फुट चौड़े मार्ग से घिरा है। तो बताओ कि उस घास के मैदान की भुजाएँ तथा मार्ग का क्षेत्रफल क्या है।

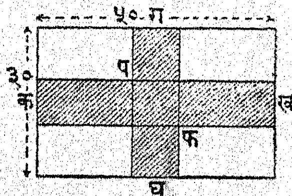
(३५) एक आयताकार मैदान के अन्दर जो ८० गज×५० गज है एक ६ फुट चौड़ा मार्ग बनाया गया है। यदि इस मार्ग को २ शिलिंग प्रति वर्ग फुट की दर से पाटा जाये, तो बतलाओ इसमें कितना व्यय होगा।

(३६) किसी फूल बाग के चारों ओर बाहर की तरफ एक ६ फुट चौड़ा मार्ग है। यदि मार्ग की भुजाएँ २१ गज व १० गज हों और रास्ते के पटवाने में ५⅚ पाई प्रति वर्ग गज के हिसाब से व्यय होता हो तो उस मार्ग का क्षेत्रफल तथा उसमें फर्श कराने का व्यय कितना होगा?

(३७) एक आयताकार क्षेत्र जिसका क्षेत्रफल एक एकड़ है, ८८ गज लम्बा है। यदि इसके अन्दर चारों ओर एक ६ फुट चौड़ा मार्ग हो तो उस मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

नम्बर ८—(३८) एक आयताकार बाग की भुजाएँ ५० गज तथा ३० गज है। यदि इसके बीच में आमने-सामने की भुजाओं के मध्य भाग को मिलाने वाले दो मार्ग प्रत्येक ६ फुट चौड़ाई के हों तो उनका क्षेत्रफल ज्ञात करो।

क्रिया :—दोनों मार्गों का क्षेत्रफल = क ख का क्षेत्रफल + ग घ का क्षेत्रफल − प फ का क्षेत्रफल [∵ प फ इसमें दो बार सम्मिलित है।]



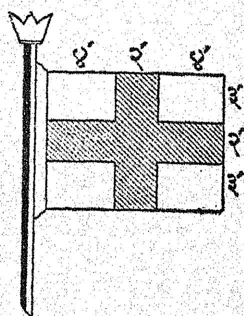
= (५० × २) वर्ग गज
+ (३२ × २) वर्ग गज
− (२ × २) वर्ग गज
= १०० वर्ग गज + ६० वर्ग गज
− ४ वर्ग गज
= १५६ वर्ग गज **उत्तर**

(३६) एक बाग ४०० गज लम्बा और २०० गज चौड़ा है । इसके बीच एक दूसरे को काटने वाली १० फुट चौड़ी ऐसी दो सड़कों पर १ रुपया ८ आना प्रति १०० वर्ग फुट की दर से कंकरीट डलवाने का मूल्य ज्ञात करो, जो कि बाग को ४ बराबर आयतों में बाँटती ।

(४०) एक वर्गाकार बाग के ठीक बीच में जिसकी भुजा २० गज है एक दूसरे को काटने वाले तथा बाग को चार बराबर आयतों में विभाजित करने वाले ८ फुट तथा ६ फुट चौड़े यदि दो मार्ग हों तो उनमें से प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करो ।

(४१) एक आयताकार बाटिका में जिसकी भुजाएँ १२२ गज तथा ५० गज हैं, २ गज तथा ३ गज चौड़े क्रमशः छोटी व बड़ी भुजा के समान्तर उसके बीचों-बीच काटने वाले दो मार्ग हैं, तो बाटिका के शेष भाग में २ आने प्रति वर्ग गज की दर से घास लगवाने का व्यय निकालो ।

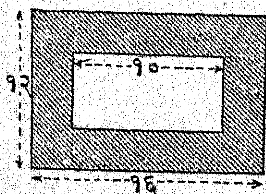
(४२) हमारे स्कूल के प्रीफैक्टों का झंडा सफेद और काले रंग के कपड़े का बना हुआ है । माप चित्र में दिए हुए हैं । बताओ इसमें कितना सफेद और कितना रंगीन कपड़ा लगा हुआ है ।



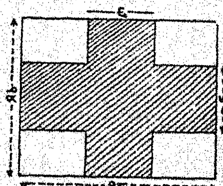
नंबर ६—नीचे दिये हुए चित्रों के छायादार भागों का क्षेत्रफल ज्ञात करो ।

माप इञ्चों में चित्रों पर लिखे हुए हैं :—

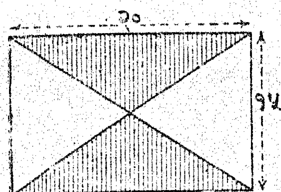
(४३)



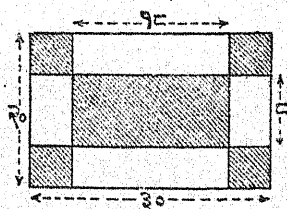
(४४)



(४५)



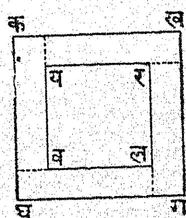
(४६)



नंबर १०—(४७) एक १२ फुट चौड़ी सड़क वर्गाकार बाग के अन्दर चारों ओर जाती है और क्षेत्रफल में ४ एकड़ है। बाग के उस भाग का क्षेत्रफल बताओ जो सड़क से घिरा हुआ है।

क्रिया :—मान लो वर्ग क ख ग घ एक बाग है और वर्ग य र ल व वह भाग है जो सड़क में घिरा हुआ है।

यदि वर्ग य र ल व की भुजाएँ जैसा कि चित्र में प्रकट है बढ़ा दी जाएँ तो सड़क का क्षेत्रफल ४ समान आयतों के क्षेत्रफल के योगफल के बराबर होगा जिनमें कि वह सड़क विभाजित कर दी गई है।



इसलिए एक आयत का क्षेत्रफल $= \frac{४}{४}$ एकड़ या १ एकड़

$= ४८४०$ वर्ग गज

परन्तु प्रत्येक आयत की लम्बाई = सड़क की चौड़ाई

= १२ फुट = ४ गज

∴ प्रत्येक आयत की लम्बाई $= \frac{४८४०}{४}$ गज = १२१० गज

∴ य र = १२१० − सड़क की चौड़ाई

= (१२१० − ४) = १२०६ गज

∴ वर्ग य र ल व का क्षेत्रफल = १२०६ × १२०६ वर्ग गज

$= \frac{१२०६ \times १२०६}{४८४०}$ एकड़

= ३०० एकड़ २४३६ वर्ग गज   उत्तर

चेतावनी :—एकड़ लम्बाई का माप नहीं है इसलिए विद्यार्थियों को इसे वर्ग गज में परिणित करना न भूलना चाहिये।

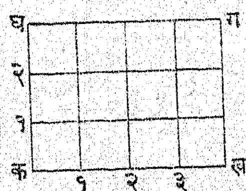
(४८) एक वर्गाकार भूमि के टुकड़े में उसके चारों ओर अन्दर ३ गज चौड़ा एक मार्ग है यदि मार्ग का क्षेत्रफल २ एकड़ हो तो भूमि के टुकड़े का क्षेत्रफल बताओ।

(४६) एक ६ फुट चौड़ी पगडण्डी का जो एक वर्गाकार बाग के बाहर चारों ओर जाती है क्षेत्रफल १६२ वर्ग गज है। तो बाग की लम्बाई बताओ।

(५०) एक वर्गाकार बाग के बाहर चारों ओर २ गज २ फुट चौड़ी एक घास की पट्टी है। यदि उसका क्षेत्रफल ११३ वर्ग गज ७ वर्ग फुट हो तो बाग का क्षेत्रफल बताओ।

खंड ग—नम्बर ११—(५१) एक आयत की भुजाओं में ३:४ का अनुपात है और क्षेत्रफल १४५२ वर्ग फुट है। तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई बताओ।

क्रिया :—मान लिया क ख ग घ एक आयत है।



क ख को ४ और क घ को तीन समान भागों में विभाजित किया। तब क ख और क ग का प्रत्येक भाग लम्बाई की एक इकाई है।

अब क्रमशः क ख और क घ के समान्तर भाजन बिन्दुओं में से समान्तर रेखाएँ खींचो।

इसलिए आयत क ख ग घ, १२ समान वर्गों में विभाजित हो गया ।

∴ १२ वर्गों का क्षेत्रफल = १४५२ वर्ग फुट

∴ १ वर्ग का क्षेत्रफल $= \frac{१४५२}{१२}$ वर्ग फुट

= १२१ वर्ग फुट

∴ वर्ग की भुजा $= \sqrt{१२१} =$ ११ फुट

परन्तु क ख ग घ आयत की लम्बाई इस वर्ग की भुजा से ४ गुनी और चौड़ाई ३ गुनी है

∴ आयत की लम्बाई = ४ × ११ = ४४ फुट
और आयत की चौड़ाई = ३ × ११ = ३३ फुट } उत्तर

(५२) एक एकड़ क्षेत्रफल वाले आयत की भुजाओं में ५ : २ का अनुपात है, तो उसकी लम्बाई व चौड़ाई बताओ।

(५३) एक आयताकार मैदान में जिसकी भुजाओं में ११ : ५ का अनुपात है १० आने ६ पाई प्रति वर्ग फुट की दर से फर्श कराने में १४४ रु० ६ आने लागत आती है, तो उसकी भुजाओं के माप बताओ।

(५४) एक आयताकार बाड़े की लम्बाई और चौड़ाई में ६ फुट का अन्तर है और उसकी चारों भुजाओं का योगफल ९६ फुट है। तो उसकी लम्बाई व चौड़ाई बताओ।

नम्बर १२—(५५) २१ फुट लम्बे और १४ फीट ३ इंच चौड़े कमरे में फर्श बिछाने में कितनी लम्बी दरी की आवश्यकता होगी जबकि दरी की चौड़ाई २ फुट ३ इंच है ?

क्रिया : - ∵ कमरे की लम्बाई = २१ फुट

और कमरे की चौड़ाई = १४ फुट ३ इञ्च या $\frac{५७}{४}$ फुट

∴ फर्श का क्षेत्रफल $= \frac{२१ \times ५७}{४}$ वर्ग फुट

और दरी का भी इतना ही क्षेत्रफल हुआ।

∴ दरी की अभीष्ट लम्बाई $= \left(\frac{२१ \times ५७}{४} \div \frac{९}{४}\right)$ फुट

$$= \frac{२१ \times ५७ \times ४}{४ \times ६} = १३३ \text{ फुट उत्तर}$$

$$\therefore \text{सूत्रः—दरी की लंबाई} = \frac{\text{फर्श का क्षेत्रफल}}{\text{दरी की चौड़ाई}}$$

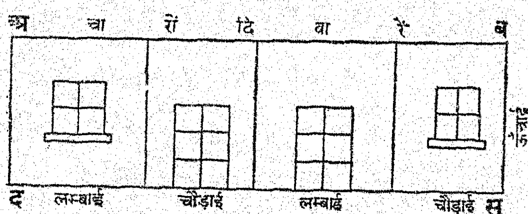
(५६) एक कमरे का फर्श ३७ फुट ४ इञ्च लम्बा है और २० फुट ३ इञ्च चौड़ा है। यदि उसमें २८ इञ्च चौड़ी दरी बिछाई जाय तो कितनी लम्बी दरी की आवश्यकता होगी ?

(५७) १७ फुट लम्बे तथा ११ फुट ३ इञ्च चौड़े कमरे में फर्श कराने में २७ इञ्च चौड़ी कितनी लम्बी दरी की आवश्यकता होगी ?

(५८) १७ फुट ६ इञ्च वर्ग कमरे के लिए २ फुट ६ इञ्च चौड़ी कितने गज दरी की आवश्यकता होगी ?

नंबर १३—(५६) एक कमरे की दीवारों का क्षेत्रफल बताओ जिसकी लंबाई 'ल' फुट चौड़ाई 'च' फुट और ऊँचाई 'ऊ' फुट के बराबर हैं।

क्रिया :—मान लो कि दीवारों के कोनों पर कब्जे लगाकर उनको फैलाने योग्य कर लिया गया है। तो निम्न आयत के द्वारा उन चारों दीवारों को दिखाया जा सकता है :—



चित्र से प्रतीत होता है कि कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल उस अकेले आयत के क्षेत्रफल के बराबर है जिसकी चौड़ाई 'ऊ' फुट (अर्थात् कमरे की ऊँचाई) है और जिसकी लम्बाई (२ ल० + २ च०) फुट अर्थात् कमरे के फर्श की चारों भुजाओं के योगफल के बराबर है।

इसलिए कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल निकालने का यह सूत्र है :—

सूत्रः—क्षेत्रफल = चारों भुजाओं का योगफल × ऊँचाई

= २ (लंबाई + चौड़ाई) × ऊँचाई

= २ (ल० + च०) × ऊँ०

(६०) उस कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल बताओ जो १६ फुट लम्बा, १४ फुट चौड़ा और १० फुट ऊँचा है।

क्रिया :—चारों दीवारों का क्षेत्रफल = २ (ल० + च०) ऊ० वर्ग फुट

= २ (१६ + १४) × १० वर्ग फुट

= २ × ३० × १० वर्ग फुट

= ६०० वर्ग फुट **उत्तर**

निम्नलिखित कमरों की चारों दीवारों का क्षेत्रफल निकालो :—

(६१) १७ फुट ५ इञ्च ल०, १५ फुट ५ इञ्च चौ० और १२ फुट ऊँ०।

(६२) लम्बाई ६ फु० ८ इञ्च, चौड़ाई ५ फुट ३ इञ्च, और ऊँचाई २ फुट।

(६३) उस कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल ज्ञात करो जो २० गज २ फुट लम्बा, १८ गज २ फुट चौड़ा और ५ फुट ६ इञ्च ऊँचा है।

नंबर १४—(६४) एक १४ फुट ३ इञ्च लंबे व १२ फुट चौड़े कमरे की ऊँचाई ज्ञात करो जबकि उस कमरे की दीवारों का क्षेत्रफल ५५ वर्ग गज ३ वर्ग फुट १०८ वर्ग इंच है।

क्रियाः—चारों दीवारों का क्षेत्रफल

= २ (लम्बाई + चौड़ाई) × ऊँचाई

किन्तु लम्बाई = १४ फुट ३ इञ्च = $\frac{५७}{४}$ फुट = $\frac{१९}{४}$ गज

और चौड़ाई = १२ फुट = ४ गज

चारों दीवारों का क्षेत्रफल = २ ($\frac{१९}{४}$ + ४) × ऊँचाई वर्ग गज

= $\frac{३५}{२}$ × ऊँचाई वर्ग गज

किन्तु चारों दीवारों का क्षेत्रफल = ५५ वर्ग गज ३ वर्ग फुट १०८ वर्ग इञ्च

$= \frac{६६५}{१२}$ वर्ग गज

∴ $\frac{३५}{२} \times$ ऊँचाई $= \frac{६६५}{१२}$

∴ ऊँचाई $= \frac{६६५}{१२} \times \frac{२}{३५}$ गज

$= \frac{१९}{६}$ गज = ३ गज ६ इञ्च   उत्तर

सूत्रः—कमरे की ऊँचाई $= \frac{\text{चारों दीवारों का क्षेत्रफल}}{\text{२ (लंबाई + चौड़ाई)}}$

(६५) यदि एक कमरे का क्षेत्रफल ११०० वर्ग फुट तथा उसकी लम्बाई ३० फुट और चौड़ाई २५ फुट हो तो ऊँचाई ज्ञात करो।

(६६) यदि किसी २० फुट लम्बी तथा १२ फुट चौड़ी आयताकार खाई की दीवारों का क्षेत्रफल ७१ वर्ग गज १ वर्ग फुट हो तो उसकी गहराई ज्ञात करो।

(६७) यदि किसी बर्तन का बाहरी तल ६ फुट लम्बा तथा ४ फुट चौड़ा हो और उसका क्षेत्रफल ७८ वर्ग फुट हो तो ऊँचाई ज्ञात करो।

खंड ग—नंबर १४ (६८) किसी २४ फुट लंबे, २१ फुट चौड़े तथा १२ फुट ऊँचे कमरे में २१ इंच चौड़ा कागज लगाने का व्यय ज्ञात करो जब कि कागज की दर ३ आ० ३ पा० प्रति टुकड़ा है। टुकड़े की लंबाई १२ गज है।

क्रियाः—

यहाँ पर लम्बाई = २४ फुट, चौ० = २१ फुट, ऊँचाई = १२ फुट

∴ चारों दीवारों का क्षेत्रफल = २ (ल० + चौ०) × ऊँ० वर्ग फुट

= २ (२४ + २१) × १२ वर्ग फुट

= १०८० वर्ग फुट

किन्तु कागज की चौड़ाई $= २१$ इञ्च $= \frac{२१}{१२}$ फुट $= \frac{७}{४}$ फुट

कागज के टुकड़ों की संख्या $= \frac{१०८० \times ४}{७} = ६१७\frac{१}{७}$

किन्तु कागज टुकड़ों में बेचा जाता है, इसलिए मूल्य ६१८ का ही दिया जायगा।

और ∵ एक टुकड़े का मूल्य = ३ आ० ३ पा० या $\frac{१३}{६४}$ रु०

∴ ६१८ ... ... $= \frac{१३ \times ६१८}{६४}$ रु०

१२५ रु० ८ आ० ६ पा० उत्तर

(६९) यदि किसी कमरे की लम्बाई १८ फुट ६ इंच, चौड़ाई १४ फुट ३ इञ्च और ऊँचाई १४ फुट ३ इञ्च हो तो ज्ञात करो कि उसे १९ इञ्च चौड़े कागज से ३ रु० ८ आ० प्रति १२ गज के टुकड़े की दर से मढ़ने में क्या व्यय होगा।

(७०) एक कमरे की ल०, चौ०, ऊँ० क्रमशः २४ फुट १० इञ्च, १३ फुट ५ इञ्च, ११ फुट ४ इञ्च हैं। तो बताओ कि उसे १ फुट ११ इञ्च चौड़े कागज से ५ आ० २ पा० प्रति गज की दर से मढ़ने में कितना व्यय होगा, जबकि उसके दरवाजे और खिड़कियों का क्षेत्रफल १०८ वर्ग फुट हैं।

(७१) एक कमरे की दीवारों और छत को २ फुट ६ इञ्च चौड़े कागज से मढ़ने के लिये कितने कागज की आवश्यकता होगी, जबकि कमरे की ल०, चौ० व ऊँ० क्रमशः १९ फुट ११ इञ्च, १५ फुट १ इंच और ९ फुट है।

(७२) किसी १० फुट ३ इञ्च लम्बे, ६ फुट ६ इञ्च चौड़े तथा ५ फुट $४\frac{१}{२}$ इञ्च गहरे कुण्ड की दीवारों में २ पौं० २ शि० प्रति हण्डरवेट की दर से सीसा मढ़वाने में क्या व्यय होगा जब कि एक वर्ग फुट सीसे का भार ८ पौं० है।

नम्बर १६–(७३) एक कमरे की ल० उसकी चौ० से ३ गुनी है। उसमें ४ शि० ६ पेंस प्रति वर्ग गज की दर से दरी बिछाई गई है और उसकी दीवारों पर ९ पेंस प्रति वर्ग गज की दर से सफेदी कराई गई है। इसमें खर्चा क्रमशः ३३ पौं० १ शि० ६ पें० और ८ पौं० ८ शि० हुआ है तो कमरे की ल०, चौ० और ऊँ० बताओ।

क्रिया:—$\frac{९}{२}$ शि० प्रति वर्ग गज की दर से फर्श कराने में ३३ पौं० १ शि० ६ पैं० लगते हैं।

∴ दरी का क्षेत्रफल = ३३ पौं० १ शि० ६ पैं० ÷ ४ शि० ६ पैंस
= १४७ वर्ग गज

परन्तु कमरे की ल०, चौ० से तीन गुनी है।

∴ कमरे की लम्बाई को तीन बराबर भागों में बाँटने से वहाँ तीन समान वर्ग बन जावेंगे।

∴ एक वर्ग का क्षेत्रफल = (१४७ ÷ ३) वर्ग गज = ४६ वर्ग गज

∴ वर्ग की भुजा = √४६ = ७ गज

∴ लम्बाई = ७ × ३ = २१ गज

और चौड़ाई = ७ गज

चारों तरफ दीवारों पर सफेदी कराने का व्यय
= ८ पौंड ८ शि०

∴ चारों दीवारों का क्षेत्रफल = ८ पौं० ८ शि० ÷ ६ पैंस।
= २२४ वर्ग गज

और कमरे का परिमाप
= २ (७ + २१) गज
= ५६ गज

∴ ऊँचाई = २२४ वर्ग गज ÷ ५६ गज = ४ गज

∴ लम्बाई = २१ गज, चौड़ाई = ७ गज और ऊँचाई = ४ गज। उत्तर

(७४) एक कमरे की लम्बाई उसकी चौड़ाई की दुगुनी है। उसकी छत को ४½ पैंस प्रति वर्ग गज की दर से रंगने में २ पौंड १२ शि० १ पैं० खर्च होते हैं और उसकी चारों दीवारों पर रोगन कराने में २ शि० ४ पैं० प्रति वर्ग गज की दर से ३५ पौंड लगते हैं। कमरे की ऊँचाई बताओ।

(७५) एक कमरे की दीवारों को १० आ० ८ पा० प्रति वर्ग फु० की दर से रँगने में ४०० रु० खर्च होते हैं और उसी कमरे में २ रु० ८ आ० प्रति वर्ग फु० की दर से फर्श कराने में ५४० रु० खर्च होते हैं। यदि उसकी लम्बाई और चौड़ाई में ३ : २ का अनुपात हो तो कमरे के माप बताओ।

(७६) एक कमरे की ऊँचाई १५ फुट है, और उसकी लम्बाई का दूना उसकी चौड़ाई के तिगुने के बराबर है। यदि उसकी दीवारों पर २½ फुट चौड़ा कागज मढ़ने में २०० गज कागज की आवश्यकता हो तो कमरे की लम्बाई और चौड़ाई बताओ।

(७७) एक कमरे की ऊँचाई उसकी लम्बाई और चौड़ाई के योगफल का $\frac{१}{५}$ है। उसकी दीवारों पर ६ पाई प्रति वर्ग फुट की दर से कागज मढ़वाने में ३१ रु० ४ आ० खर्च होते हैं तो उसकी लम्बाई बताओ।

नंबर १७–(७८) एक बन्द सन्दूक की बाहरी लम्बाई ४ फुट, चौड़ाई ३ फुट, ऊँचाई २ फुट है। यह एक इंच मोटी लकड़ी का बना हुआ है। इसके अन्दर के भाग को ३ आना प्रति वर्ग फुट की दर से रंगवाने में क्या खर्च होगा ?

क्रिया :—बाहरी माप ४८ इञ्च, ३६ इञ्च और २४ इञ्च हैं।

∴ अन्दर की माप ४६ इञ्च, ३४ इञ्च और २२ इञ्च हुई।

(क्योंकि लकड़ी की मोटाई का दुगुना उनमें से घटा दिया गया है)

चारों भुजाओं का क्षेत्रफल $= २(४६ + ३४) \times २२$ व० इं०

$= ३५२०$ व० इं०

तली और ढकने का क्षेत्रफल $= २ \times ४६ \times ३४$ व० इं०

$= ३१२८$ व० इं०

रंगा जाने वाला कुल क्षेत्रफल $= (३५२० + ३१२८)$ व० इं०

$= ६६४८$ व० इं० $= \frac{२७७}{६}$ व० फुट

रँगाई का खर्चा $= \frac{२७७}{६} \times \frac{३}{१६} = \frac{२७७}{३२}$ रु०

$= ८$ रु० १० आ० ६ पा० **उत्तर**

सूचना :—१. एक बन्द सन्दूक के सम्बन्ध में :—

(अ) यदि बाहर के माप दिये हुए हों और अन्दर के माप निकालने हों तो वस्तु की मोटाई के दुगुने को माप में से घटा दो।

(ब) यदि अन्दर के माप दिये हुए हों और बाहर के माप ज्ञात करने हों तो वस्तु की मोटाई के दुगुने को अन्दर के माप में जोड़ दो।

२. बिना ढक्कन वाले सन्दूक के प्रश्नों में वस्तु की मोटाई का दुगुना उसकी लम्बाई व चौड़ाई में प्रश्न के अनुसार जोड़ा या घटाया जाता है परन्तु उसकी ऊँचाई में वस्तु की मोटाई का एक गुना ही जोड़ा या घटाया जाता है।

(७६) एक सन्दूक के बाहरी माप ४ फुट ६ इञ्च, ३ फु० ८ इञ्च और ४ फु० २ इञ्च हैं। यदि वह लकड़ी जिसका वह बना हुआ है एक इञ्च मोटी हो तो उसके अन्दर ८ पैंस प्रति दर्जन व० फु० की दर से रंगाई कराने में क्या व्यय होगा?

(८०) एक बिना ढक्कन वाले लकड़ी के सन्दूक पर जिसकी बाहरी लं०, चौ० व गहराई क्रमशः ३, २ और $१\frac{१}{२}$ फु० हैं और जो १ इंच मोटी लकड़ी का बना है भीतर और बाहर रंग होना है तो बताओ कि कितने व० फु० क्षेत्रफल पर रंगाई होगी।

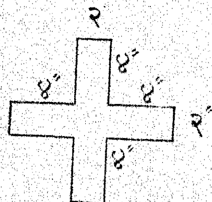
(८१) एक बन्द सन्दूक के बाहरी माप ६, ५ व ४ फु० हैं। यदि वह ६ इञ्च मोटी लकड़ी का बना हो, तो इसमें कितने वर्ग फु० लकड़ी लगी होगी?

(८२) लोहे की $\frac{१}{२}$ इञ्च मोटी चादर का एक बिना ढक्कन का सन्दूक १८×१२×६ इंच के बाहरी माप का बनवाना है। तो बताओ कि उसके लिए कितने वर्ग फु० चादर की आवश्यकता होगी।

मिश्रित :—

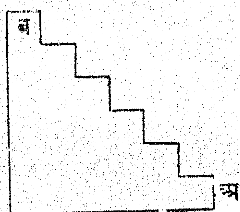
(८३) एक बड़े कमरे में जो कि २६·६१ फु० लम्बा, तथा १५·२१ फु० चौड़ा है समान वर्ग टाइल्स का फर्श करना है। तो बताओ उसके लिए कम से कम कितने वर्ग टाइल्स की आवश्यकता होगी।

(८४) साथ में दिये हुए चित्र का क्षेत्रफल ज्ञात करो। नाप चित्र में दिये हुए हैं।



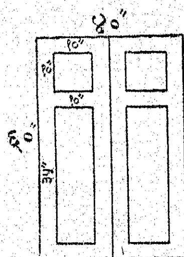
(८५) चित्र में ६ सीढ़ियाँ दिखाई गई हैं जो ११ इञ्च ऊँची और १ फुट चौड़ी हैं।

सीढ़ियों पर, अ से ब तक ३ फुट चौड़ा कालीन बिछाया गया है। कालीन का क्षेत्रफल निकालो।



संकेत :—सीढ़ियों की लम्बाई
= कालीन की चौड़ाई = ३'

(८६) एक आलमारी के प्रत्येक किवाड़ के चौखटे में चार काँच के टुकड़े फँसाये गये हैं। नाप चित्र में दिये हुए हैं। काँच का मूल्य ६ पाई प्रति वर्ग इञ्च है और लकड़ी का मूल्य ४ पाई प्रति वर्ग इञ्च है। कांच और लकड़ी का मूल्य ज्ञात करो।



(८७) एक वर्गाकार कमरे का क्षेत्रफल १००·२००१ वर्ग फुट है। उसके किनारे-किनारे १ फुट चौड़ाई तक संगमरमर लगाया गया है जिसके दाम १० रु० प्रति वर्ग फुट है। शेष फर्श पर दरी बिछाई गई है जिसके दाम ५ रु० प्रति वर्ग फुट है। दरी बिछाने और संगमरमर लगाने में कुल कितने दाम लं !
(रुड़की ओवरसियर, १९५३)

(८८) एक कमरे की लम्बाई चौड़ाई से तिगुनी है। उसमें दरी ४ शि० ६ पैं० प्रति वर्ग गज की दर से बिछाई गई है। उसकी दीवारों पर ८ शि० ४ पैं० प्रति वर्ग फुट की दर से सफेदी कराई गई। यदि दरी बिछाने के दाम ३ ३ पौं० १ शि० ६ पैं० और सफेदी कराने के दाम ८ पौं० ८ शि० हैं तो उस कमरे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई ज्ञात करो। (रुड़की ओवरसियर, १९४९)

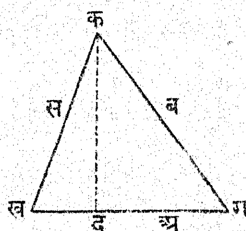
खंड (ब)

त्रिभुज : उनका क्षेत्रफल

१ **त्रिभुज** वह समतल आकृति है जो तीन सरल रेखाओं से घिरी हुई हो। त्रिभुज की वह भुजा जिस पर त्रिभुज को खड़ा हुआ माना जाये उस त्रिभुज का **आधार** कहलाती है।

त्रिभुज की **लम्बवत ऊँचाई** वह लम्ब है जो कि आधार पर उसके सम्मुख वाले कोण से डाला जाय।

इस प्रकार त्रिभुज क ख ग में क द लम्ब तथा ऊँचाई है और ख ग आधार।



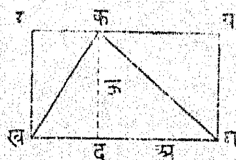
टिप्पणी:—त्रिभुज क ख ग में अ, ब, स से उसकी उन भुजाओं की लम्बाई विदित करने का चलन है जो कि क्रमशः क, ख, ग शीर्ष कोणों के सम्मुख होती हैं।

२. किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना जबकि आधार तथा ऊँचाई दिये हुए हों।

ज्ञात है :—(क) एक त्रिभुज क ख ग।

(ख) आधार ख ग जोकि अ से प्रकट किया गया है।

(ग) ऊँचाई क द जो ऊ से प्रकट की गई है



ज्ञात करना है :—त्रिभुज का क्षेत्रफल।

रचना :—ख ग य र आयत, उसी आधार ख ग पर और उसी ऊँचाई क द का पूर्ण करो।

गणना :—त्रिभुज क ख ग का क्षेत्रफल

$= \triangle$ क ख द $+ \triangle$ क ग द

$= \frac{1}{2}$ आयत क द ख र $+ \frac{1}{2}$ आयत क द ग प

$= \frac{1}{2} \times$ ख द $\times$ क द $+ \frac{1}{2} \times$ ग द $\times$ क द

$= \frac{1}{2} \times$ क द (ख द $+$ ग द)

$= \frac{1}{2} \times$ क द $\times$ ख ग

$= \frac{1}{2}$ ख ग $\times$ क द $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2}$ अ $\times$ ऊ वर्ग इकाई

इसलिए अ $= \frac{२\ \text{क्षे०}}{\text{ऊ}}$ और ऊ $= \frac{२\ \text{क्षे०}}{\text{अ}}$

जबकि क्षे० का अर्थ त्रिभुज का क्षेत्रफल, अ का अर्थ आधार और ऊ का अर्थ त्रिभुज की ऊँचाई है।

नियम :—त्रिभुज का क्षेत्रफल, आधार और ऊँचाई के गुणनफल को **२** से भाग देने से निकलता है।

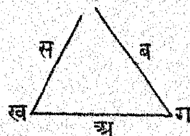
३. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना जबकि तीनों भुजाएँ दी हुई हों।

त्रिभुज का क्षेत्रफल निम्नलिखित सूत्र से निकाला जाता है।

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{\text{प (प} - \text{अ) (प} - \text{ब) (प} - \text{स)}}$

जब कि क्षे० का अर्थ त्रिभुज का क्षेत्रफल हो और अ, ब, स भुजाओं की लम्बाई को निर्दिष्ट करते हों और प का अर्थ अर्द्ध-परिमाप हो,

अर्थात् प $= \frac{\text{अ} + \text{ब} + \text{स}}{२}$

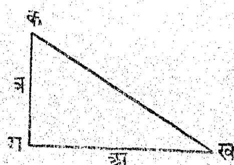


टिप्पणी :—त्रिभुज के अर्द्ध-परिमाप का अर्थ है तीनों भुजाओं की लम्बाई के योगफल का आधा।

४. और दूसरी प्रकार के त्रिभुजों के क्षेत्रफल के सूत्र ऊपर दिए हुए सिद्धान्तों से निकाले जा सकते हैं।

(अ) समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ।

क्षेत्रफल $= \frac{१}{२} \times$ उन भुजाओं की लम्बाई का गुणनफल जिसके बीच का कोण समकोण है ।



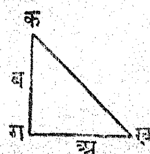
या क्षे० $= \frac{१}{२}$ अ $\times$ ब वर्ग इकाई,

जबकि अ, ब वह भुजाएँ हैं जिनके बीच में समकोण है, और क्षे० का अर्थ त्रिभुज का क्षेत्र-फल है ।

(ब) समकोण समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

क्षेत्रफल $= \frac{१}{२} \times$ उन भुजाओं में से एक का वर्ग जिनके बीच में समकोण है क्योंकि अ = ब

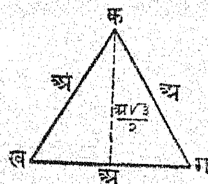
$$\text{या क्षे०} = \frac{१}{२}\text{ अ}^{२} = \frac{१}{२}\text{ ब}^{२}$$



जबकि अ उन भुजाओं में से कोईसी एक को प्रकट करता है जो कि समकोण को बनाती हैं और क्षे०, क्षेत्रफल को विदित करता है ।

(स) समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\text{क अ} = \sqrt{\text{अ}^{२} - \left(\frac{\text{अ}}{२}\right)^{२}} = \frac{\text{अ}\sqrt{३}}{२}$$



$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{१}{२} \times \text{ख ग} \times \text{क अ}$$

$$= \frac{१}{२} \times \text{अ} \times \text{अ}\frac{\sqrt{३}}{२}$$

$$= \frac{\text{अ}^{२}\sqrt{३}}{४} \text{ वर्ग इकाई}$$

$$\therefore \text{अ} = \sqrt{\frac{४ \times \text{क्षे०}}{\sqrt{३}}} \quad [\sqrt{३} = १\cdot७३२...]$$

जबकि क्षे० का अर्थ क्षेत्रफल और अ बराबर भुजाओं में से किसी एक की लम्बाई को प्रकट करता है ।

प्रश्नावली २३

खंड क—नम्बर १—(१) उस त्रिभुज का क्षेत्रफल बताओ जिसका आधार १५ फुट और ऊँचाई १२ फुट हो। उत्तर व० फुट में निकालो।

क्रिया :—क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

= $\frac{1}{2}$ × १५ × १२ व० फुट = ९० वर्ग फुट उत्तर

निम्नलिखित त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिनमें :—

(२) आधार १८ फुट और ऊँचाई ११ फुट हो। उत्तर वर्ग फुट में दो।

(३) आधार २२ इञ्च और ऊँचाई २० इञ्च हो। उत्तर व० इञ्च में दो।

(४) आधार ४ गज २ फुट और ऊँचाई ३ गज १ फुट हो। उत्तर वर्ग फुट में दो।

नम्बर २—(५) उस समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो जिसकी समकोण बनाने वाली भुजाएँ १२ सें० मी० और ८ सें० मी० हैं। उत्तर वर्ग सें० मी० में दो।

क्रिया :—क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × समकोण बनाने वाली भुजाओं का गुणनफल।

= $\frac{1}{2}$ × १२ × ८ = ४८ वर्ग सें० मी० उत्तर

उन समकोण त्रिभुजों के क्षेत्रफल बताओ जिनकी समकोण बनाने वाली भुजाएँ निम्नलिखित हैं :—

(६) १५ सें० मी० और २० सें० मी०। उत्तर वर्ग सें० मी० में दो।

(७) ११ फुट और ६ फुट। उत्तर वर्ग फुट में दो।

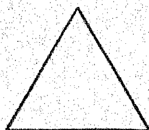
(८) ७ गज १ फुट और १३ गज १ फुट। उत्तर वर्ग गज वर्ग फुट में दो।

(९) कर्ण ८५ इञ्च और एक भुजा ६८ इञ्च है। उत्तर वर्ग फु० और वर्ग इञ्च में दो।

संकेत :—पहले दूसरी भुजा ज्ञात करो।

(१०) कर्ण ४ गज १ फुट १ इञ्च और एक भुजा २ गज १ फुट १ इञ्च है। उत्तर वर्ग गज वर्ग फुट वर्ग इञ्च में दो।

खंड ख—नम्बर ३—(११) एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल बताओ जिसकी प्रत्येक भुजा १० इं० है। उत्तर ठीक एक दशमलव तक वर्ग इंच में दो।



क्रिया :—क्षेत्रफल $= \frac{(\text{भुजा})^{२} \times \sqrt{३}}{४}$

$= \frac{१० \times १० \times \sqrt{३}}{४}$

$= २५ \times १\cdot७३२$ वर्ग इञ्च [$\because \sqrt{३} = १\cdot७३.२...$]

$= ४३\cdot३००$ वर्ग इञ्च $= ४३\cdot३$ वर्ग इञ्च उत्तर

उन समबाहु त्रिभुजों के क्षेत्रफल बताओ जिनकी प्रत्येक भुजा :—

(१२) १८ फुट है। उत्तर ठीक एक दशमलव तक व० फु० में दो।

(१३) ३ गज २ फुट ६ इंच है। उत्तर व० गज, व० फु० और व० इंचों में दो।

(१४) २५ जरीब है। उत्तर शुद्ध दो दशमलव तक एकड़ में दो।

नम्बर ४—(१५) एक त्रिभुज की भुजाएँ १३ सें० मी०, १४ सें० मी० और १५ सें० मी० हैं, उसका क्षेत्रफल निकालो।

क्रिया :—क्षेत्रफल $= \sqrt{प \; (प - अ)(प - ब)(प - स)}$

जबकि अ = १३ सें० मी०, ब = १४ सें० मी०, स = १५ सें० मी०

और $प = \frac{१३ + १४ + १५}{२} = २१$ सें० मी०

$\therefore$ क्षेत्रफल $= \sqrt{२१ (२१ - १३)(२१ - १४)(२१ - १५)}$ व० सें० मी०

$= \sqrt{२१ \times ८ \times ७ \times ६}$ व० सें० मी०

$= \sqrt{७ \times ३ \times २ \times ४ \times ७ \times २ \times ३}$ व० सें० मी०

$= \sqrt{७^{२} \times ३^{२} \times ४^{२}} = ७ \times ३ \times ४$ व० सें० मी०

$= ८४$ व० सें० मी० उत्तर

ऐसे त्रिभुजों के क्षेत्रफल बताओ जिनकी भुजाएँ निम्नलिखित हैं :—

(१६) ६ इंच, ८ इंच, १० इंच।

(१७) १५ फुट, ३६ फुट, ३६ फुट।

(१८) ३६ गज, ४१ गज, ५० गज।

ऐसे त्रिभुओं के क्षेत्रफल २ दशमलव तक ज्ञात करो जिनकी भुजाएँ :—

(१६) ७ इंच, ६ इंच, १२ इंच हैं।

(२०) ३५ सें० मी०, ४५ सें० मी०, ६० सें० मी० हैं।

(२१) एक त्रिभुजाकार भूखंड की भुजाएँ ३४०, ६१० और ७५० गज हैं। उस खेत का लगान २ रु० ८ आ० प्रति बीघे की दर से क्या होगा ?

(२२) एक त्रिभुज की भुजाएँ ६, ४० और ४१ के अनुपात में हैं और उसका परिमाप ४५० फुट है। उसका क्षेत्रफल बताओ।

संकेत :—समानुपाती भागों का योगफल = ६ + ४० + ४१ = ६०

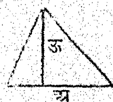
∴ पहली भुजा = ४५० का $\frac{९}{९०}$ = ४५ फुट

दूसरी भुजा = ४५० का $\frac{४०}{९०}$ = २०० फुट

तीसरी भुजा = ४५० का $\frac{४१}{९०}$ = २०५ फुट

(२३) एक त्रिभुज की भुजाएँ १३, २०, २१ के अनुपात में हैं और परिमाप १६२ गज है, तो क्षेत्रफल ज्ञात करो।

खंड ग—नम्बर ५—(२४) एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ५४ वर्ग गज है और आधार १२ गज है। तो त्रिभुज की ऊँचाई बताओ।



क्रिया :—ऊँचाई = $\frac{२ \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

$= \frac{२ \times ५४}{१२}$ = ६ गज **उत्तर**

ऐसे त्रिभुजों की ऊँचाई बताओ जिनका क्षेत्रफल और आधार :—

(२५) २४० वर्ग इंच और १२ इंच हैं।

(२६) ५२ वर्ग गज १८ वर्ग इंच और ८ गज २ फुट ३ इंच हैं। उत्तर गज, फुट, इंच में दो।

उन त्रिभुजों के आधार बताओ जिनके :—

(२७) क्षेत्रफल ५६ वर्ग गज और ऊँचाई ७ गज हो।

(२८) क्षेत्रफल ५ वर्ग फुट, ऊँचाई २ फुट ६ इंच हो।

(२९) क्षेत्रफल ४६·२ वर्ग जरीब और ऊँचाई ६०० कड़ी हो।

संकेत :—

$$\text{आधार} = \frac{२ \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$$

(३०) उस लम्ब की लम्बाई बताओ जो कि एक समकोण त्रिभुज के समकोण से कर्ण पर डाला जाय यदि वे भुजाएँ जो कि समकोण को बनावें ३ सैं० मी० और ४ सैं० मी० हों।

नंबर ६—(३१) उस समबाहु त्रिभुज की भुजा बताओ जिसका क्षेत्रफल १२ वर्ग फुट हो।

क्रिया :—समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल निम्नलिखित सूत्र से निकलता है :—

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{\text{अ}^२\sqrt{३}}{४}$$

$$\therefore १२ = \frac{\text{अ}^२\sqrt{३}}{४}$$

$$\text{या} \quad \text{अ}^२ = \frac{१२\times४}{\sqrt{३}} = \frac{३\times४\times४}{\sqrt{३}}$$

$$= \frac{\sqrt{३}\times\sqrt{३}\times४\times४}{\sqrt{३}} \left[\because ३ = \sqrt{३}\times\sqrt{३}\right]$$

$$= १६\sqrt{३} \quad = १६\times१\text{·}७३२$$

$$\therefore \text{अ} = ४\sqrt{१\text{·}७३२} = ४\times१\text{·}३१६$$

$\therefore$ समबाहु त्रिभुज की भुजा = ५·२६४ फुट **उत्तर**

(३२) उस समबाहु त्रिभुज की भुजा बताओ जिसका क्षेत्रफल १५ वर्ग गज है।

(३३) एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल एक एकड़ है। उसकी भुजा की लम्बाई फुट में बताओ।

(३४) एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप उतने ही फुट है जितना कि उसका क्षेत्रफल वर्ग फुट में है, तो उसकी भुजा बताओ।

(३५) उस समबाहु त्रिभुज की भुजा की लम्बाई क्या होनी चाहिये जिसका क्षेत्रफल उस वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर है जिसका विकर्ण १२० गज है?

खंड स

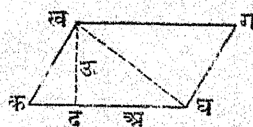
समान्तर चतुर्भुज और समचतुर्भुज : उनका क्षेत्रफल

१. **समान्तर चतुर्भुज** वह चार भुजाओं वाली आकृति है जिसकी सम्मुख भुजाएँ समान्तर हों।

सम चतुर्भुज वह समान्तर चतुर्भुज है जिसकी सब भुजाएँ बराबर हों।

वह भुजा जिस पर समान्तर चतुर्भुज खड़ा हुआ प्रतीत होता है, उसका **आधार** कहलाती है, और आधार के सम्मुख भुजा की लम्बवत् दूरी उसकी **ऊँचाई** कहलाती है।

२. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालना यदि आधार और ऊँचाई निर्दिष्ट हो।



क्रिया :—क ख ग घ एक समान्तर चतुर्भुज निर्दिष्ट है जिसका आधार क घ, अ से और ऊँचाई ख द, ऊ से विदित है।

तो समान्तर चतुर्भुज क ख ग घ का क्षेत्रफल

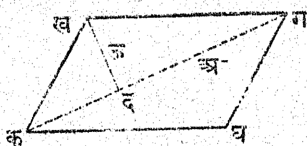
$$= २\triangle \text{क ख घ} = २ \times \frac{१}{२} \times \text{क घ} \times \text{खद}$$
$$= \text{अ} \times \text{ऊ वर्ग इकाई}$$

नियम :—समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

या, क्षे० = अ × ऊ वर्ग इकाई

$\therefore$ अ = $\frac{\text{क्षे०}}{\text{ऊ}}$ और ऊँ = $\frac{\text{क्षे०}}{\text{अ}}$

३. उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना जिसका एक विकर्ण निर्दिष्ट हो और एक शेष शीर्ष कोण से विकर्ण पर पड़ने वाला लंब निर्दिष्ट हो।



क्रिया :—दी हुई आकृति में कर्ण क ग की लम्बाई अ से प्रकट की गई है और लम्ब ख द की लम्बाई ऊ से प्रकट की गई है।

इसलिए समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = २ △ क ख ग

= २ × $\frac{1}{2}$ × क ग × ख द

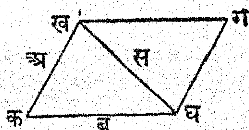
= ऊ × अ वर्ग इकाई।

नियम :—समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = लंब × विकर्ण

या, क्षे० = ऊ × अ वर्ग इकाई

$\therefore$ ऊ = $\frac{\text{क्षे०}}{\text{अ}}$ और अ = $\frac{\text{क्षे०}}{\text{ऊ}}$

४. उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालना जिसकी दो संलग्न भुजाएँ, और एक विकर्ण निर्दिष्ट हों।



क्रिया :—दी हुई आकृति में दो संलग्न भुजाएँ अ और ब हैं और कर्ण स है।

∴ समान्तर चतुर्भुज क ख ग घ का क्षेत्रफल

$$=२\triangle \text{क ख घ}$$

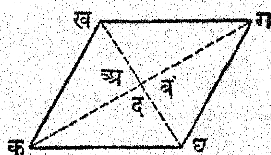
$$=२\sqrt{\text{प}(\text{प}-\text{अ})(\text{प}-\text{ब})(\text{प}-\text{स})}$$

जब कि $\text{प} = \frac{\text{अ}+\text{ब}+\text{स}}{२}$

नियम :—समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$=२\sqrt{\text{प}(\text{प}-\text{अ})(\text{प}-\text{ब})(\text{प}-\text{स})}$$

५. समचतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालना जबकि उसके दोनों विकर्ण निर्दिष्ट हों।



क्रिया :—क ख ग घ एक समचतुर्भुज है जिसके दो विकर्णों को अ और ब से विदित किया गया है। समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजन करते हैं।

∴ समचतुर्भुज क ख ग घ का क्षेत्रफल

$$=२\triangle \text{क ख ग}$$

$$=२\times\tfrac{१}{२}\,\text{क ग}\times\text{ख द}$$

$$=\text{क ग}\times\text{ख द}=\frac{\times\text{अ}}{२}\left[\because \text{ख द}=\frac{\text{ख घ}}{२}\right]$$

$$=\frac{\text{अ}\times\text{ब}}{२}$$

नियम :— सम चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{\text{त्रिकर्णों का गुणनफल}}{२}$

या, क्षे० = $\frac{\text{अ} \times \text{ब}}{२}$

प्रश्नावली २४

खंड क—नम्बर १—(१) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ जिसका आधार ४० फुट और ऊँचाई १५ फुट है।

क्रिया :—समान्तर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

= ४० × १५ = ६०० वर्ग फुट   उत्तर

निम्नलिखित समान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बताओ :—

(२) आधार २५ फुट, ऊँचाई १० फुट।

(३) आधार ३ गज २ फुट, ऊँचाई १ गज १ फुट।

(४) आधार १ जरीब १० कड़ी, ऊँचाई ५ जरीब ५ कड़ी।

नम्बर २—(५) उस समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई बताओ जिसका क्षेत्रफल ४५६ वर्ग फुट और आधार १२ फुट है।

क्रिया :—समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$

= $\frac{४५६}{१२}$ = ३८ फुट   उत्तर

निम्नलिखित समान्तर चतुर्भुजों की ऊँचाई बताओ जबकि उनका :—

(६) क्षेत्रफल ४७ वर्ग गज ७ वर्ग फुट, आधार २८ गज २ फुट हो।

(७) क्षेत्रफल ३ एकड़, आधार ११४ जरीब हो।

नम्बर ३—(८) एक समान्तर चतुर्भुज का आधार बताओ जिसका क्षेत्रफल २.५६ वर्ग फुट और ऊँचाई ३.२ फुट है।

क्रिया :—समान्तर चतुर्भुज का आधार = $\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$

$= \frac{२\text{·}५६}{३\text{·}२} =$ ·८ फुट उत्तर

निम्नलिखित समान्तर चतुर्भुजों के आधार बताओ जबकि उनका :—

(९) क्षेत्रफल १ एकड़ और ऊँचाई ४५ जरीब हो।

(१०) क्षेत्रफल ५१२ वर्ग जरीब और ऊँचाई ३२ कड़ी हो।

खंड ख–नंबर ४—(११) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ जिसका एक विकर्ण ३० गज है और जिसकी लंबवत् दूरी एक सम्मुख शीर्ष कोण से ९ गज है।

क्रिया :—समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = विकर्ण × लंब

= ३० × ९ = २७० वर्ग गज उत्तर

निम्नलिखित समान्तर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल निकालो जब कि :—

(१२) विकर्ण ३ फुट ४ इञ्च और सम्मुख शीर्षकोण से विकर्ण पर पड़ने वाला लंब ४ फुट ६ इञ्च है।

(१३) विकर्ण २१ जरीब और उस पर एक लंब ६ जरीब २५ कड़ी है।

(१४) उस समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण बताओ जिसका क्षेत्रफल १५ वर्ग गज है और उस पर एक लंब ३ गज है।

नंबर ५—(१५) एक समचतुर्भुज के विकर्ण १६ फुट और १२ फुट है। उसका क्षेत्रफल, भुजाओं की लंबाई और ऊँचाई बताओ।

क्रिया :—समचतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= \frac{\text{विकर्णों का गुणनफल}}{२} = \frac{१६ \times १२}{२} =$ ९६ वर्ग फुट

सम चतुर्भुज की भुजा

$= \sqrt{\left(\frac{क}{२}\right)^२ + \left(\frac{ख}{२}\right)^२} = \sqrt{८^२ + ६^२} = \sqrt{६४ + ३६} = \sqrt{१००}$

= १० फुट उत्तर

समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई $= \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}} = \frac{९६}{१०} = ९.६$ फुट

उत्तर

टिप्पणी :—क और ख विकर्ण हैं।

(१६) यदि किसी समचतुर्भुज के विकर्ण ७२ इञ्च और ९६ इञ्च हों तो उसका क्षेत्रफल, भुजा तथा ऊँचाई बताओ।

(१७) यदि एक समचतुर्भुज के विकर्ण ८ गज और ६ गज हों तो उसका क्षेत्रफल, भुजा तथा ऊँचाई निकालो।

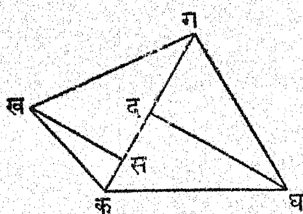
(१८) यदि एक समचतुर्भुज का एक विकर्ण १४४ सें० मी० और उसकी भुजा ९७ सें० मी० हो तो दूसरा विकर्ण, उसका, क्षेत्रफल तथा ऊँचाई ज्ञात करो।

(१९) एक समचतुर्भुज की भुजा ३० गज है और उसका छोटा विकर्ण बड़े विकर्ण का $\frac{३}{४}$ है तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

खंड (द)

चतुर्भुज और उसका क्षेत्रफल

१. **चतुर्भुज** वह आकृति है जो चार सरल रेखाओं से घिरी हो।



वह सरल रेखा जो दो सम्मुख कोणों को मिलाती है उसका **विकर्ण** कहलाती है और जो लंब शेष कोणों से उस विकर्ण पर डाले जाते हैं वे **अंतर्लंब** कहलाते हैं।

इस प्रकार दी हुई आकृति क ख ग घ में क ग एक विकर्ण है और ख स और घ द विकर्ण पर डाले हुए लंब हैं।

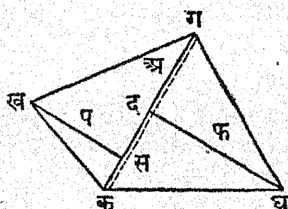
२. चतुर्भुज का क्षेत्र फल निकालना जबकि एक विकर्ण और सम्मुख कोणों से विकर्ण पर डाले हुए लंब निर्दिष्ट हों।

क्रिया :—

निर्दिष्ट (१) एक चतुर्भुज क ख ग घ।

(२) एक विकर्ण क ग जिसकी लम्बाई अ इकाई है।

(३) विकर्ण पर डाले हुए लंब ख स और घ द जिनकी लम्बाई क्रमशः प और फ है।



ज्ञात करना : अभीष्ट चतुर्भुज का क्षेत्रफल।

गणना :—चतुर्भुज क ख ग घ का क्षेत्रफल $=\triangle$ क ख ग $+\triangle$ क घ ग

$= \frac{1}{2} \times$ क ग $\times$ ख स $+ \frac{1}{2} \times$ क ग $\times$ घ द

$= \frac{1}{2}$ क ग (ख स $+$ घ द) व० इकाई।

$= \frac{1}{2}$ अ (प $+$ फ) व० इकाई

नियम :—चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}$ विकर्ण $\times$ विकर्ण पर डाले हुए लंबों का योगफल

अर्थात्, क्षे० $= \frac{1}{2}$ **अ (प $+$ फ)**

इससे, **अ $= \frac{\text{२ क्षे०}}{\text{प} + \text{फ}}$ और प $+$ फ $= \frac{\text{२ क्षे०}}{\text{अ}}$**

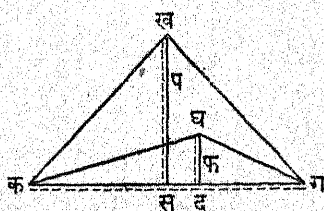
टिप्पणी :—यदि चतुर्भुज का विकर्ण आकृति से बाहर हो जैसे दी हुई आकृति में दिखाया गया है, तो

चतुर्भुज क ख ग घ का क्षेत्रफल $=\triangle$ क ख ग $-\triangle$ क घ ग

$= \frac{1}{2}$ क ग $\times$ ख स $- \frac{1}{2}$ क ग $\times$ घ द

$= \frac{1}{2}$ क ग (ख स $-$ घ द) वर्ग इकाई

$= \frac{1}{2}$ अ (प $-$ फ)



नियम :—किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसका विकर्ण बाहर हो

$= \frac{1}{2}$ विकर्ण $\times$ विकर्ण पर पड़ने वाले लंबों का अन्तर

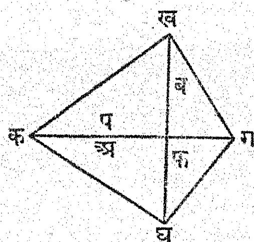
या क्षे० $= \frac{1}{2}$ अ (प $-$ फ)।

विशेष रूप—(१) यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर काटें जैसा कि दी हुई आकृति से विदित है,

तो अ = प + फ

इसलिए चतुर्भुज क ख ग घ का क्षेत्रफल

= $\frac{1}{2}$ ब (प + फ) वर्ग इकाई।

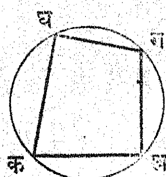


नियम :— = $\frac{1}{2}$ अ × ब

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × दोनों विकर्णों का गुणनफल

या क्षे० = $\frac{1}{2}$ अ × ब

(२) यदि चतुर्भुज एक वृत्त के अन्दर बना हो जैसा कि दी हुई आकृति से विदित है अर्थात् चतुर्भुज चक्रीय हो तो उसका क्षेत्रफल



= $\sqrt{(प - अ)(प - ब)(प - स)(प - द)}$

जबकि अ, ब, स, द चतुर्भुज की भुजाएँ हैं।

और प = $\frac{अ + ब + स + द}{२}$

प्रश्नावली २५

खंड क—नंबर १—(१) उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ जिसका एक विकर्ण ३ गज २ फुट है और विकर्ण पर पड़ने वाले लंब २ गज १ फुट और १ गज २ फुट हैं।

क्रिया :—क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ अ (प + फ)

जबकि = ३ गज २ फुट = $\frac{११}{३}$ गज

प = २ गज १ फुट = $\frac{७}{३}$ गज

फ = १ गज २ फुट = $\frac{५}{३}$ गज

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{१}{२} \times \frac{११}{३} \times \left(\frac{७}{३} + \frac{५}{३}\right) \text{ व० गज}$$

$$= \frac{१}{२} \times \frac{११}{३} \times ४ = \frac{२२}{३} \text{ व० गज}$$

$$= ७ \text{ वर्ग गज } ३ \text{ वर्ग फुट}$$ उत्तर

(२) उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ जिसकी माप निम्न प्रकार है :— विकर्ण २१२ फुट, लंब ६७ और १०३ फुट।

(३) उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसका विकर्ण १२७४ कड़ी और उस पर पड़े हुए लम्ब ५५०, और ५८२ कड़ी हैं।

(४) यदि विकर्ण ३ फुट ६ इञ्च और लंब २ फुट ४ इञ्च और १ फुट ८ इञ्च है तो उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

नंबर २-(५) उस चतुर्भुज का विकर्ण बताओ जिसका क्षेत्रफल २१० वर्ग फुट और विकर्ण पर पड़ने वाले लंब १७ फुट और १३ फुट हैं।

क्रिया :—विकर्ण $= \frac{२ \text{ क्षे०}}{\text{प} + \text{फ}}$

$$= \frac{२ \times २१०}{१७ + १३} = \frac{२ \times २१०}{३०} \text{ फुट} = १४ \text{ फुट}$$ उत्तर

(६) उस चतुर्भुज का विकर्ण बताओ जिसकी माप निम्न प्रकार हो :— क्षेत्रफल ४२० वर्ग फुट और लंब १२ फुट, ६ फुट।

(७) उस चतुर्भुज के विकर्ण की लम्बाई ज्ञात करो जिसका क्षेत्रफल ८४० वर्ग गज है और लंब १५ गज ३ इञ्च और १२ गज २ फुट ६ इञ्च हैं।

(८) यदि किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल ४·३६०२ वर्ग जरीब हो और उसके लंब ४ जरीब १८ कड़ी और ७ जरीब हों तो उसका विकर्ण बताओ।

नंबर ३-(९) उस चतुर्भुज के विकर्ण पर पड़ने वाले लंबों को ज्ञात करो जिसका क्षेत्रफल ४२० वर्ग फुट हो और विकर्ण २८ फुट और लंबों की लंबाई में ३ : २ का अनुपात हो।

क्रिया :—$(प+फ) = \frac{२ क्षे०}{आ}$

$$= \frac{२ \times ४२०}{२८} = ३० \text{ फुट}$$

इसलिए $प = ३०$ का $\frac{३}{५} = १८$ फुट
$फ = ३०$ का $\frac{२}{५} = १२$ फुट } उत्तर

(१०) उस चतुर्भुज के विकर्ण पर पड़ने वाले लंबों को ज्ञात करो जिसका क्षेत्रफल ३५० वर्ग फुट, विकर्ण २८ फुट और लंबों का अनुपात २ : ३ हो।

(११) यदि किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल १ एकड़ हो और विकर्ण ६० गज १ फुट ६ इंच हो और लंब में ५ : ३ का अनुपात हो तो उनकी लम्बाई ज्ञात करो।

(१२) किसी चतुर्भुज का क्षेत्रफल ६३६ वर्ग गज है और कर्ण ४८ गज है। यदि एक लंब दूसरे से १२ गज अधिक लम्बा हो तो उनकी लम्बाई ज्ञात करो।

खंड ख - नंबर ४ (१३) उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ जिसके विकर्ण ११ गज ६ इंच और १३ गज २ फुट हों और वह एक दूसरे को समकोण पर काटते हों।

क्रिया :—क्षेत्रफल $= \frac{१}{२}$ अ × ब

$$= \frac{१}{२} \times \frac{६७}{६} \times \frac{४१}{३} = \frac{२७४७}{३६} \text{ वर्ग गज}$$

= ७६ वर्ग गज २ वर्ग फुट १०८ वर्ग इंच उत्तर

(१४) उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ जिसके विकर्ण १३ फुट और १२ फुट हों और एक दूसरे को समकोण पर काटते हों।

(१५) उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ जिसके विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर काटें और उनकी लम्बाई २० गज १ फुट ६ इंच और १५ गज २ फुट ४ इंच हो।

(१६) उस चतुर्भुजाकर फर्श पर कितनी चटाई लगेगी जिसके विकर्ण १२ जरीब २० कड़ी और ६ जरीब १५ कड़ी हैं और एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं

नंबर ५—(१७) किसी चतुर्भुज की आकृति से बाहर पड़ने वाले विकर्ण की लंबाई ४५ कड़ी है और उन लंबों का अन्तर जो कि शेष कोणों से उस पर डाले गये हैं १८ कड़ी है तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

क्रिया :—क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ अ (प – फ)

जबकि अ = ४५ कड़ी और प – फ = १८ कड़ी

∴ इसलिए क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × ४५ × १८ वर्ग कड़ी = ४०५ वर्ग कड़ी उत्तर

(१८) एक चतुर्भुज का बाहर पड़ने वाला विकर्ण ६० गज लम्बा है। यदि उस पर पड़ने वाले लंब का अन्तर २५ गज हो तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(१९) उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालो जिसका एक विकर्ण बाहर पड़ता है और उसकी लम्बाई ६४ जरीब है और उस पर पड़ने वाले लंबों का अन्तर २५ जरीब है।

मिश्रित :—(२०) एक चतुर्भुज क ख ग घ में भुजा क ख, ख ग, ग घ, घ क, और विकर्ण क ग क्रमशः २५, ६०, ५२, ३९ और ६५ फुट हैं। तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात करो।

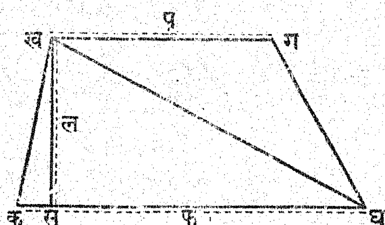
(२१) उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो जिसकी भुजाएँ क्रमशः ९, ४०, २८, और १५ फुट हैं और पहली दो भुजाओं के बीच का कोण समकोण है।

खण्ड (य)

समलंब उसका क्षेत्रफल

१. समलंब वह चार भुजाओं वाली आकृति है जिसकी दो आमने-सामने की भुजाएँ समान्तर हों।

२. समलंब का क्षेत्रफल निकालना जब कि समान्तर भुजाएँ और उनकी लंबवत दूरी निर्दिष्ट हों।



क्रिया :—मान लो समान्तर भुजाओं की लम्बाई प और फ हैं और उनके बीच लंबवत दूरी ल है।

ख घ को मिलाओ।

समलंब क ख ग घ का क्षेत्रफल

$$= \triangle \text{क ख घ} + \triangle \text{ख ग घ}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, \text{ख स} \times \text{क घ} + \tfrac{1}{2}\, \text{ख ग} \times \text{ख स}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, \text{ख स}\, (\text{क घ} + \text{ख ग})$$
$$= \tfrac{1}{2}\, \text{ल}\, (\text{प} + \text{फ}) \text{ वर्ग इकाई}$$

नियम :—समलंब का क्षेत्रफल = समान्तर भुजाओं के जोड़ और लंबवत् दूरी के गुणनफल का आधा

या क्षे० $= \tfrac{1}{2}$ ल (प + फ) वर्ग इकाई

जिससे $\text{ल} = \dfrac{\text{२ क्षे०}}{\text{प} + \text{फ}}$ और $\text{प} + \text{फ} = \dfrac{\text{२ क्षे०}}{\text{ल}}$

प्रश्नावली २६

खंड क—नंबर १ (१) उस समलंब का क्षेत्रफल बताओ जिसकी समान्तर भुजाएँ १० और १२ सें मी० हों और उनकी लंबवत् दूरी ६ सें० मी० हो।

क्रिया:—क्षेत्रफल = $\frac{१}{२}$ × समान्तर भुजाओं का जोड़ × लंबवत दूरी

= $\frac{१}{२}$(१० + १२) × ६ = ६६ वर्ग सें० मी० उत्तर

(२) उस समलंब का क्षेत्रफल निकालो जिसकी समान्तर भुजाएँ २४ और ३० गज, लंबवत् दूरी ८ गज हो।

(३) उस समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल बताओ जिसकी समान्तर भुजाएँ ३ गज १ फुट ४ इञ्च और २ गज १ फुट ८ इञ्च हैं और जिसकी लंबवत ऊँचाई १ गज २ फुट है।

नंबर २—(४) उस समलंब की ऊँचाई बताओ जिसका क्षेत्रफल १२८ वर्ग गज और समान्तर भुजाएँ १४ और १८ गज हैं।

क्रिया :—ऊँचाई = $\frac{\text{२ क्षेत्रफल}}{\text{समान्तर भुजाओं का योगफल}}$

= $\frac{२ \times १२८}{१४ + १८} = \frac{२५६}{३२}$ = = ८ गज उत्तर

(५) उस समलंब की ऊँचाई ज्ञात करो जिसका क्षेत्रफल ५६० वर्ग फुट और समान्तर भुजाएँ ५ फुट ७ इञ्च और ८ फुट ५ इञ्च हों।

(६) उस समलंब की ऊँचाई ज्ञात करो जिसका क्षेत्रफल ६ एकड़ ३ रूड है और जिसकी समान्तर भुजाएँ ५ जरीब १५ कड़ी और ३ जरीब ८५ कड़ी हैं।

नंबर ३—(७) एक समलंब के आकार के खेत का क्षेत्रफल ४$\frac{१}{२}$ एकड़ है और समान्तर भुजाओं की लंबवत दूरी १२० गज है और एक समान्तर भुजा १० जरीब है, तो दूसरी भुजा बताओ।

क्रिया :—समान्तर भुजाओं का जोड़ = $\frac{\text{२ क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$

= $\frac{२ \times \frac{९}{२} \times ४८४०}{१२०}$ = ३६३ गज

$\therefore$ दूसरी समान्तर भुजा = (२६३ − २२०) गज

[$\because$ १ जरीब = २२ गज]

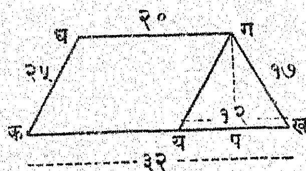
= १४३ गज उत्तर

(८) एक समलम्ब की एक समान्तर भुजा दूसरी भुजा से १ फुट अधिक लम्बी है, चौड़ाई १ फुट ६ इञ्च है और क्षेत्रफल २७० वर्ग इञ्च है। तो समान्तर भुजाओं की लम्बाई बताओ।

(९) एक समलंब की समान्तर भुजाओं में ५ : ३ का अनुपात है। उसका क्षेत्रफल ४१६० वर्ग फुट है और ऊँचाई ४० फुट है। तो समान्तर भुजाओं की लम्बाई बताओ।

(१०) एक समलम्ब का क्षेत्रफल ५७० वर्ग फुट है। उसकी ऊँचाई ६ गज १ फुट है और एक समान्तर भुजा दूसरी से ४ गज २ फुट छोटी है। तो समान्तर भुजाओं की लम्बाई ज्ञात करो।

खंड ख—नंबर ४—(११) उस समलम्ब का क्षेत्रफल बताओ जिसकी भुजाएँ क्रमशः ३२, १७, २०, २५, फुट हैं और पहली और तीसरी भुजाएँ समान्तर हैं।



क्रिया :—क ख ग घ निर्दिष्ट समलंब है। ग से ग प लंब क ख पर खींचा और ग से घ क के समान्तर ग य रेखा खींची तो ग य = घ क = २५ फु०

और य ख = क ख − क य = ३२ − २० = १२ फुट

अब $\triangle$ ग य ख = $\sqrt{\text{प (प − का) (प − खा) (प − गा)}}$

जबकि प = $\frac{\text{का + खा + गा}}{२} = \frac{१२ + १७ + २५}{२} = \frac{५४}{२}$ = २७ फुट

$\therefore \triangle$ ग य ख $= \sqrt{२७ (२७-१२) (२७-१७) (२७-२५)}$

$= \sqrt{२७ \times १५ \times १० \times २}$

$= \sqrt{९ \times ३ \times ३ \times ५ \times ५ \times २ \times २}$

$= ३ \times ३ \times ५ \times २ = ९०$ वर्ग फुट

$\therefore$ ऊँचाई ग प $= \frac{२ \times \triangle \text{ग य ख}}{\text{य ख}} = \frac{२ \times ९०}{१२} = १५$ फुट

अब समलंब क ख ग घ का क्षेत्रफल

$= \frac{१}{२} \times$ ऊँचाई $\times$ समान्तर भुजाओं का जोड़

$= \frac{१}{२} \times १५ \times (२० + ३२)$ वर्ग फुट

$= \frac{१}{२} \times १५ \times ५२$ वर्ग फुट

$= ३९०$ वर्ग फुट उत्तर

(१२) किसी समलंब की दो समान्तर भुजाएँ २४ और २० गज हैं और शेष दूसरी भुजाएँ १३ गज और १५ गज हैं। तो उसका क्षेत्रफल निकालो।

(१३) एक रेलवे प्लेटफार्म की दो भुजाएँ समान्तर हैं और शेष दूसरी भुजाएँ बराबर हैं। यदि समान्तर भुजाएँ क्रमशः १०० और १२० गज हों और बराबर भुजाएँ १५ गज हों तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

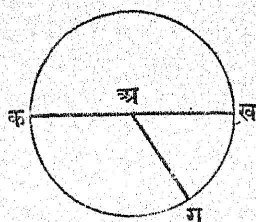
(१४) उस समलंब का क्षेत्रफल बताओ जिसकी समान्तर भुजाएँ ७२ फुट और ३८ फुट ८ इंच हैं और दूसरी दो भुजाएँ २० फुट और २६ फुट ८ इंच हैं।

मिश्रित :—(१५) एक खाई के ऊपरी भाग की चौड़ाई ४० फुट है और तली की चौड़ाई २० फुट है। उसमें से जो मिट्टी निकाली गई है उससे एक बन्द बाँधा गया जो कि ऊपरी भाग में ३७ फुट चौड़ा और तली में ४३ फुट चौड़ा है और जिसकी ऊँचाई २० फुट है। तो उस खाई की गहराई बताओ।

(१६) एक समलंब जिसकी समान्तर भुजाओं की लम्बाई २:३ के अनुपात में है एक आयत में से काटा गया है जो कि १२ फुट लम्बी और ३ फुट चौड़ी है और कुल का $\frac{३}{४}$ भाग घेरती है। तो समान्तर भुजाओं की लम्बाई बताओ।

सत्रहवाँ अध्याय

वृत्त: उनकी परिधि और क्षेत्रफल



१. वृत्त एक ऐसी आकृति है जो उस रेखा से घिरी होती है जिसको एक ऐसे बिन्दु का पथ बनाता है जो कि चलता हुआ सदा एक स्थिर बिन्दु से एक ही दूरी पर रहता है।

घेरने वाली रेखा को **परिधि** कहते हैं और स्थिर बिन्दु को **केन्द्र** कहते हैं। **व्यासार्द्ध** वह सरल रेखा है जो कि एक वृत्त के केन्द्र से परिधि तक खींची जाए जैसे कि अ क, अ ख, अ ग।

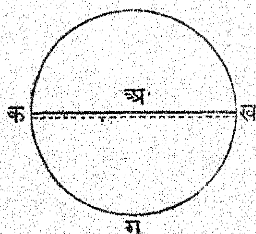
किसी वृत्त का **व्यास** वह सरल रेखा है जो केन्द्र से होती हुई दोनों ओर परिधि से जा मिले जैसे कि क ख।

ऊपर की परिभाषा से निकलने वाले फल

(क) एक वृत्त के सब व्यासार्ध बराबर होते हैं।

(ख) व्यास, व्यासार्द्ध का दुगुना होता है।

२. वृत्त की परिधि ज्ञात करना जब कि व्यास निर्दिष्ट हो।



निर्दिष्ट :—(१) एक वृत्त क ख ग

(२) एक व्यास क ख, अ इकाई लम्बा।

अभीष्ट :—वृत्त की परिधि ज्ञात करना।

गणना :—सब वृत्तों की आकृति एक सी ही होती है और प्रयोगों से और देख-भाल से पता चला है कि एक वृत्त की परिधि और व्यास में एक विशेष सम्बन्ध होता है। इस विशेष सम्बन्ध को एक ऐसी भिन्न से विदित किया जाता है जिसका अंश वृत्त की परिधि और हर वृत्त का व्यास होता है।

इस भिन्न का मूल्य प्रायः एक यूनानी अक्षर π (पाई) से विदित किया जाता है जिसका ठीक मूल्य अंकों में नहीं विदित हो सकता परन्तु किसी भी सीमा तक उसका ठीक मूल्य बताया जा सकता है।

इस प्रकार, $\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$

जिससे, **परिधि** $= \pi \times$ व्यास

या संक्षेप में, प $= \pi \times$ अ $=$ २π र ($\because$ अ $=$ २र)

और अ $= \frac{\text{प}}{\pi}$ और र $= \frac{\text{प}}{\pi\text{२}}$

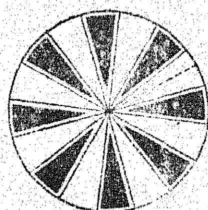
जबकि प परिधि को विदित करता है, अ व्यास को और र व्यासार्द्ध को। π का मूल्य $\frac{२२}{७}$ या ३·१४१६ होता है।

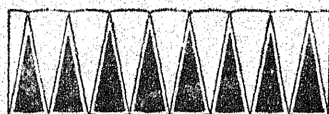
नियम :—(१) वृत्त के व्यास की लंबाई को π से गुणा करके परिधि की लंबाई ज्ञात की जाती है।

(२) वृत्त की परिधि को π से भाग देकर व्यास ज्ञात किया जाता है।

३. वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करना जब कि व्यासार्ध निर्दिष्ट हो।

क्रिया :—एक वृत्त लो और उसके १६ बराबर बराबर खंड बनाओ। इनको पत्र में से काट लो और इनमें से एक के दो सम भाग करो और उनको निकटवर्ती आकृति के अनुसार लगाओ। यदि इन वृत्त खण्डों की



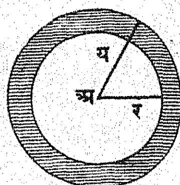


संख्या अधिक बढ़ा दी जाय तो यह लगभग एक आयत की आकृति जैसी हो जावेगी जिसकी लम्बाई π र (अर्द्ध-परिधि) और चौड़ाई र (व्यासार्द्ध) होगी इसलिए।

वृत्त का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

$= \pi$ र × र $= \pi$ र^2 वर्ग इकाई

या संक्षेप में, क्षे० $= \pi$ र^2



जिससे व्यासार्द्ध $= \sqrt{\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}}$

या र $= \sqrt{\frac{\text{क्षे०}}{\pi}}$

४. वृत्ताकार छल्ले का क्षेत्रफल ज्ञात करना।

क्रिया :— यदि य और र क्रमशः बाहर और अन्दर वाले वृत्त के व्यासार्द्ध हों तो

छल्लों का क्षेत्रफल = बाहर के वृत्त का क्षेत्रफल − अन्दर के वृत्त का क्षेत्रफल।

$= \pi$ य^2 $- \pi$र^2 $= \pi$(य^2 − र^2)

$= \pi$ (य + र) (य − र)

प्रश्नावली २७

खंड क— नंबर १—(१) यदि एक वृत का व्यास २८ फीट है तो उसकी परिधि बताओ।

क्रिया :— परिधि $= \pi \times$ व्यास

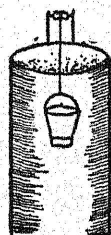
$= \frac{२२}{७} \times$ २८ = ८८ फुट उत्तर

उन वृत्तों की परिधि की लम्बाई बताओ जिनके व्यास निम्नलिखित हो :—

४२ फुट (३) ३$\frac{१}{२}$ इञ्च

(४) शुक्र तारे का व्यास ७६८० मील है। उसकी परिधि बताओ।

(५) एक साइकिल जिसके पहिये का व्यास ३० इञ्च है। पहिये के ६३०० चक्कर लगाने पर कितनी दूर जायेगी ?



(६) ३३ फुट गहरे कुएँ में से पानी की बाल्टी को खींचना है। रस्सी १४" व्यास की एक चर्खी पर लिपट रही है। बाल्टी के ऊपर आने तक रस्सी कितने बार चर्खी पर लिपट जायगी ?

(७) उस वृत्ताकार खेत की बाड़ लगाने में क्या व्यय होगा जिसका व्यासार्द्ध ११२ फुट है जबकि बाड़ की दर ६ आने प्रति गज है।

(८) एक घंटाघर की घड़ी की मिनट की सुई ८ इञ्च लम्बी है, और घंटे की सुई ६ इञ्च लंबी है। तो बताओ कि २ दिन ६ घंटे में मिनट की सुई घंटे की सुई से कितना अधिक चलेगी।

नंबर २—(९) उस वृत्त का व्यास बताओ जिसकी परिधि ७ फुट ४ इंच है।

क्रिया :—७ फुट ४ इंच = ८८ इंच

$$\text{व्यास} = \frac{\text{परिधि}}{\pi}$$

$$= \frac{८८}{२\frac{३}{७}} = ८८ \times \frac{७}{२२} = २८\text{इंच}$$ **उत्तर**

उन वृत्तों के व्यास बताओ जिनकी परिधि निम्नलिखित है :—

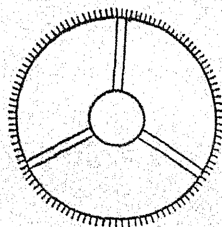
(१०) ६८ गज १ फुट ४ इंच (११) ७३ गज १ फुट

यदि यह कल्पना की जाये कि वृत्त की परिधि उसके व्यास से ३$\frac{१}{७}$ गुनी होती है तो उन वृत्तों के व्यासार्द्ध बताओ जिनकी परिधि निम्नलिखित हैं :—

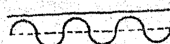
(१२) ७ गज १ फुट (१३) १३९ गज १ फुट

(१४) चन्द्रमा का व्यास बताओ जबकि उसकी परिधि ६८५० मील है।

(१५) एक गोल पहिये में ६६ दाँते हैं। एक दाँते के बीच से दूसरे दाँते के बीच तक का अन्तर $१\frac{१}{२}''$ है। पहिये का भीतरी व्यास ज्ञात करो



(१६) जस्ते की एक चपटी चादर ११ फुट चौड़ी है। इसको मोड़-पीट कर एक झुरींदार चादर बनाई गई है जिसकी झुर्रियाँ अर्ध-वृत्तों की शकल में हैं। झुरींदार चादर की चौड़ाई बताओ।



खंड ख—नंबर ३—(१७) एक वृत्त का क्षेत्रफल बताओ जिसका व्यासार्द्ध ३ फुट ६ इञ्च हो।

या :—वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi र^२$

$$= \frac{२२}{७} \times \left(\frac{३}{७}\right)^२ = \frac{२२}{७} \times \frac{७}{२} \times \frac{७}{२} = \frac{७७}{२}$$

= ३८ वर्ग फुट ७२ व० इञ्च उत्तर

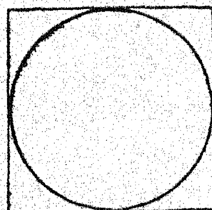
उन वृत्तों का क्षेत्रफल बताओ जिनके व्यासार्द्ध निम्नलिखित हैं :—

(१८) ४ गज २ फुट (१९) १ फुट २ इंच

(२०) एक फव्वारा २ गज १ फुट ७ इंच तक अपने चारों ओर पानी फेंकता है। उस भूमि का क्या क्षेत्रफल है जिसको वह सींचता है ?

(२१) राम की गाय उसके खेत में खूँटे से बँधी हुई है। यदि रस्सी की लम्बाई २ फुट ६ इंच हो तो वह कितने स्थान में घास चर सकती है ?

(२२) एक वर्गाकार कार्ड बोर्ड के टुकड़े की भुजा ७ इंच है। इसमें से बड़े से बड़ा वृत्ताकार टुकड़ा काट लिया गया। इस वृत्त का क्षेत्रफल बताओ और यह भी बताओ कि कार्ड बोर्ड का कितना क्षेत्रफल शेष रह गया।

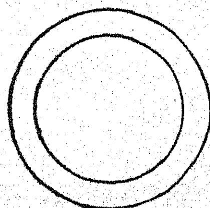


(२३) एक आयत और उसकी चौड़ाई वाली भुजा पर बने हुए अर्ध-वृत्त की शक्ल में हमारे स्कूल की एक खिड़की है। खिड़की की चौड़ाई ४ फुट और सबसे अधिक ऊँचाई १० फुट है। खिड़की का क्षेत्रफल बताओ।



नंबर ४—(२४) उस छल्ले का क्षेत्रफल बताओ जिसकी बाह्य और अन्त:परिधि के व्यासार्द्ध २१ सें० मी० और १४ सें० मी० हैं।

या :—छल्ले का क्षेत्रफल



= बड़े वृत्त का क्षेत्रफल—छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi य^२ - \pi र^२$

$= \frac{२२}{७} \times (२१)^२ - \frac{२२}{७} \times (१४)^२$

$= \frac{२२}{७} \times २१ \times २१ - \frac{२२}{७} \times १४ \times १४$

$= \frac{२२}{७} (४४१ - १९६)$

$= \frac{२२}{७} \times २४५ = २२ \times ३५ = ७७०$ वर्ग से० मी० **उत्तर**

(२५) एक छल्ले के बाह्य और अन्त: वृत्तों के व्यासार्द्ध क्रमश: २५ फुट और २४ फुट हैं। छल्ले का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

(२६) एक वृत्ताकार मीनार का अन्त: व्यास ५४ फुट है, और मीनार के आधार में ३५२ वर्ग फुट भूमि है। तो दीवार की मोटाई बताओ।

संकेत :—३५२ वर्ग फुट छल्ले का क्षेत्रफल है।

(२७) एक वृत्ताकार बाग के चारों ओर सड़क जाती है। उसकी बाह्य परिधि ५०८ फट और अन्त: परिधि ४२० फुट है। सड़क की चौड़ाई बताओ।

(२८) एक तार को मोड़कर ३५ इंच व्यासार्द्ध का वृत्त बनाया जा सकता है। यदि उस तार का वर्ग बनाया जाय तो वर्ग की भुजा की लम्बाई बताओ।

नम्बर ५—(२६) एक वृत्त का क्षेत्रफल एक एकड़ है। उसका व्यासार्द्ध बताओ।

क्रिया :—व्यासार्द्ध $= \sqrt{\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}}$

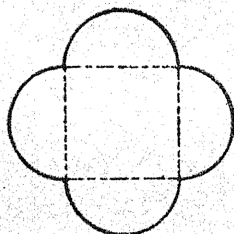
$= \sqrt{\frac{४८४०}{\frac{२२}{७}}} = \sqrt{\frac{४८४० \times ७}{२२}}$ गज $=$ ३६·२४ गज उत्तर

(३०) एक वृत्त का क्षेत्रफल १५४ वर्ग गज है। उसका व्यास बताओ।

(३१) एक वृत्त का क्षेत्रफल उतना ही है जितना कि एक आयत का है जो १३२ फुट × ६४ फुट है। उस वृत्त का व्यासार्द्ध बताओ।

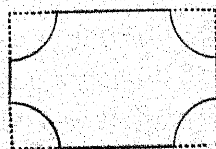
(३२) एक वृत्त की परिधि और व्यास का अन्तर ६० फुट है। उसका व्यासार्द्ध बताओ।

(३३) दो एक केन्द्रीय वृत्तों के क्षेत्रफल क्रमशः १५४ वर्ग इञ्च और ३०८ वर्ग इंच हैं। छल्ले की मोटाई बताओ।

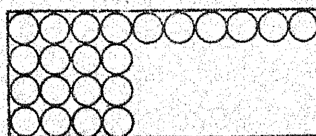


विविध :—

(३४) गेंदे के फूलों की एक क्यारी चित्र जैसी शकल में है। बीच में एक वर्ग है और वर्ग की प्रत्येक भुजा पर एक अर्धवृत्त बना हुआ है। वर्ग की भुजा २१ फुट है। यदि प्रत्येक गेंदे के पौधे के लिये ६ वर्ग फुट स्थान की आवश्यकता तो गेंदे के पौधों की संख्या बताओ।

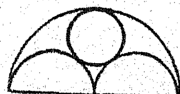


(३५) एक आयताकार लोहे के टुकड़े की लम्बाई २५" और चौड़ाई १६" है। इसके चारों कोनों से ७" के व्यासार्द्ध के चौथाई वृत्त (पाद) काट लिये गये। बचे हुए टुकड़े का क्षेत्रफल ज्ञात करो।



(३६) एलोमोनियम की एक चादर ५ इञ्च लम्बी और २ इञ्च चौड़ी है। इसमें से $\frac{१}{२}$ इञ्च व्यास के गोल टुकड़े बटन बनाने के लिये काटे गये हैं। बताओ कुल कितने बटन बन सकते हैं और चादर का कितना प्रतिशत भाग व्यर्थ जायगा।

(३७) नेहरू विद्यालय के हाल के दरवाजे के ऊपर लगी हुई महराब की शकल दिये हुए चित्र जैसी है। सबसे बड़े अर्धवृत्त का व्यास ४ फुट है। छोटे वाले दोनों अर्ध वृत्तों में से प्रत्येक का व्यास २ फुट है। सब से छोटे वृत्त का व्यास १६ इञ्च है। दोनों छोटे अर्धवृत्त और छोटे वृत्त में लाल काँच के शीशे लगे हुए हैं और शेष भाग लकड़ी का है। यदि काँच का मूल्य ≈) प्रति वर्ग फुट और लकड़ी का मूल्य ≋)॥ प्रति वर्ग फुट हो तो इस महराब पर क्या व्यय हुआ होगा ?



(३८) एक गाड़ी के बड़े पहिये और छोटे पहिये की परिधियों में ४५ : ११ का अनुपात है। छोटा पहिया $\frac{3}{8}$ मील जाने में २७२ चक्कर अधिक लगाता है। प्रत्येक पहिये की परिधि बताओ।

(रुड़की ओवरसियर, १९५३)

अठारहवाँ अध्याय

खेत की माप

(१) खेत साधारणतया सरल रेखाओं से घिरी हुई आकृति होती है जिसको त्रिभुजों, चतुर्भुजों और समलंबों में विभाजित किया जा सकता है। इसलिए खेत का क्षेत्रफल उसके अलग-अलग भागों के क्षेत्रफल के योगफल से निकाला जा सकता है। इन भागों में विभाजित करने के लिए एक **आधार रेखा** और उस पर पड़ने वाले लंबों की आवश्यकता होती है।

(२) **आधार रेखा** वह रेखा है जोकि खेत के एक कोण से दूसरे कोण तक खींची जाती है और **अन्तर्लम्ब** वह लंब है जो कि शीर्ष कोणों से आधार रेखा पर डाले जाते हैं।

(३) प्रायः एक आधार रेखा पर्याप्त होती है परन्तु कभी-कभी दो या अधिक रेखाएँ जोकि पूरी अन्दर हों या कुछ अन्दर और कुछ बाहर हों खींचना सुविधा-जनक होता है।

(४) उन अलग-अलग भागों का क्षेत्रफल जिनमें एक सरल रेखा वाली असीमित आकृति विभाजित हो सकती है ज्ञात किया जाता है यदि (क) आधार रेखा पर पड़ने वाले लंबों की लम्बाई ज्ञात हो और (ख) आधार रेखा के उन भागों की जिनमें कि वह लंबों से बट जाती है लम्बाई ज्ञात हों।

(५) क्षेत्रमापक आधार रेखा और लंबों की लम्बाई को गुन्टर की जरीब से नापते हैं। यह २२ गज लम्बी होती है और इसमें १०० कड़ियाँ होती हैं। इन लम्बाइयों को एक विशेष विधि से एक पुस्तक में लिखा जाता है जिसको **फील्ड-बुक** कहते हैं।

(६) फील्ड-बुक के प्रत्येक पृष्ठ के तीन भाग किये जाते हैं। बीच के भाग में वे दूरियाँ लिखी जाती हैं जोकि आधार रेखा पर एक मुख्य स्टेशन से उन बिन्दुओं तक नापी जाती हैं जहाँ पर लंब पड़ते हैं।

दक्षिण ओर के भाग में आधार रेखा के दक्षिण ओर के लंबों की लम्बाई लिखी जाती है और बाईं ओर के भाग में आधार रेखा के बाईं ओर के लंबों की लम्बाई लिखी जाती है। आधार रेखा के सिरे **स्टेशन** कहलाते हैं।

(७) क्षेत्रमापक नीचे से बीच वाले भाग में लिखना आरम्भ करता है और ऊपर को लिखता जाता है। पहली लिखाई से पहली आधार रेखा की दिशा ज्ञात होती है। दूसरी लिखाई से पहले स्टेशन से पहले लंब के पाद तक की आधार रेखा पर दूरी ज्ञात होती है। तीसरी लम्बाई से उस लंब की लम्बाई ज्ञात होती है और यदि लंब आधार रेखा के दक्षिण ओर हो तो दक्षिण ओर के भाग में लिखी जाती है और यदि बाईं ओर हो तो बाईं ओर

के भाग में। चौथी लिखाई से आधार पर की वह दूरी ज्ञात होती है जो पहले स्टेशन से दूसरे लंब के पाद तक होती है। पाँचवीं से उसी लंब की लम्बाई विदित होती है। इसी प्रकार करते-करते वह दूसरे स्टेशन तक पहुँच जाता है।

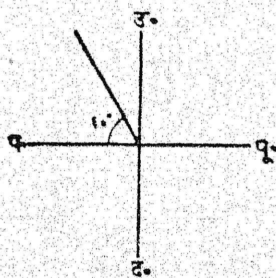
यदि नापने में एक ही आधार रेखा का प्रयोग किया जाय तो और नापों की आवश्यकता नहीं होती। यदि दो या अधिक रेखाओं का प्रयोग किया जाय तो मापक दूसरे स्टेशन से तीसरे स्टेशन तक दूसरी आधार रेखा पर उसी प्रकार चलता है जैसे कि पहले स्टेशन से दूसरे स्टेशन तक गया था। इसी प्रकार और आधार रेखा पर होता हुआ पहले स्टेशन पर आ जाता है।

स्टेशन की फील्ड-बुक में इस प्रकार विदित किया जाता है :—⊙ क, ⊙ ख, ⊙ ग या (१), (२), (३)। आधार रेखा की दिशा को भिन्न-भिन्न प्रकार से विदित किया जाता है।

जैसे, '⊙ क से ⊙ ख को पूर्व की ओर जाओ' विदित करता है कि आधार रेखा स्टेशन क से स्टेशन ख को पूर्व की ओर जाती है। क स्टेशन ⊙ 'से स्टेशन ⊙ख को उत्तर-पूर्व की ओर जाओ' विदित करता है कि आधार रेखा स्टेशन क से स्टेशन ख तक उत्तर-पूर्व की दिशा में जाती है।

'स्टेशन (२) से स्टेशन (३) तक उत्तर की ओर पश्चिम दिशा के साथ ६०° का कोण बनाते चलो, विदित करता है कि स्टेशन (२) से स्टेशन (३) तक आधार रेखा उत्तर को पश्चिम दिशा के साथ ६०° का कोण बनाती हुई जाती है।

"(२) से दक्षिण ओर जाओ" से विदित होता है कि (२) स्टेशन पर पहुँच कर मापक पहली आधार रेखा से दूसरी आधार रेखा पर आने के लिये दक्षिण की ओर को मुड़ जाता है। परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि वह समकोण ही बनाये।



यदि अंक ० दक्षिण या बाएँ भाग में लिखा होता है तो उसका अर्थ होता है कि उस बिन्दु का आधार रेखा से कुछ अन्तर नहीं है अर्थात् उस बिन्दु पर खेत की सीमा आधार रेखा को काटती है।

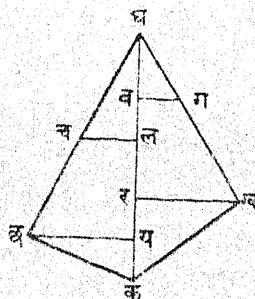
प्रश्नावली २८

खंड क—नंबर १ (१) निम्नलिखित से खेत की शक्ल बनाकर उसका क्षेत्रफल निकालो :—

मापनी १ सें० मी० = १०० कड़ी

(१)

	कड़ी	
	घ ⊙ को	
	६००	
	४००	ग १२०
च १००	३६०	
	२५०	ख १४०
छ १६०	२००	
	क ⊙ को	



क्रिया :—

क घ = ६०० खींचो। इसमें से क य = २००, क र = २५० क ल = ३६० क ब = ४०० काटो। बिन्दु र और घ पर लंब ख र और ग ब दक्षिण की

ओर को क्रमशः १४० और १२० के बराबर उठाओ। बिन्दु य और ल पर भी बाईं ओर को लंब क्रमशः १६० और १०० के बराबर उठाओ।

क ख, ख ग, ग घ, घ च, च छ और छ क को मिलाओ। इस प्रकार जो आकृति क ख ग घ च छ बनी वह खेत का मान चित्र है।

आकृति क ख ग घ च छ का क्षेत्रफल

= △क ख र + समलंब ख ग व र + △ग व घ + △क छ य

+ समलंब च छ य ल + △घ च ल

$$= \frac{\text{२५०} \times \text{१४०}}{\text{२}} + \frac{(\text{१४०} + \text{१२०}) \times \text{१५०}}{\text{२}} + \frac{\text{२००} \times \text{१२०}}{\text{२}}$$

$$+ \frac{\text{२००} \times \text{१६०}}{\text{२}} + \frac{(\text{१६०} + \text{१००}) \times \text{१६०}}{\text{२}} + \frac{\text{२४०} \times \text{१००}}{\text{२}}$$

= १७५०० + १९५०० + १२००० + १६००० + २०८०० + १२०००

= ९७८०० वर्ग कड़ी उत्तर

निम्नलिखित से मानचित्र खींचो और उनका क्षेत्रफल ज्ञात करो :—

(२)

	कड़ी	
	घ ⊙ को	
	७००	
च १२०	५००	८० ग
छ ०	४००	
	२००	४० ख
	क ⊙ से	

(३)

	कड़ी	
	छ ⊙ को	
	५००	
	४००	२० च
ज ८०	३२५	० घ
	१२०	८० ग
	५०	४० ख
	क ⊙ से	

(४)

	गज	
	⊙च	
	३००	१५० घ
छ १५०	१५०	० ग
	७५	५० ख
ज १००	५०	
	⊙क	

(५)

	कड़ी	
	ख ⊙ को	
०	१००	४०
२०	६०	
	५०	१०
०	४०	३०
१०	३०	१०
०	०	२०
	क ⊙ से	

(६)

	जरीब	
	⊙ ख	
१००	४००	
	३००	७५
०	२५०	५०
	१५०	०
५०	७५	२५
	⊙क	

(७)

	कड़ी	
	ख ⊙ को	
५०	३००	०
	२४०	५०
	१६०	०
६०	१००	
	८०	५०
०	०	४०
	क ⊙ से	

खंड ख—नंबर २—(८) निम्नलिखित से खेत का मानचित्र खींच और क्षेत्रफल ज्ञात करो :— मापनी १ कड़ी = ५० सें० मी०

(८)

	इकी	
	अ ⊙ को	
	५००	
त २०	३२०	
भ ३०	१४०	
	स ⊙ से	मुड़ो दक्षिण ओर
	स ⊙ को	
	४००	
	१८०	२० ज
	ब ⊙ से	उ० पू० जाओ
	ब ⊙ को	
	३००	
छ १२	२००	
च १०	६०	
	अ ⊙ से	उ० प० जाओ

या :—

एक रेखा अ ब = ३०० उत्तर पश्चिम की ओर खींचो। ब और अ को केन्द्र मानकर और व्यासार्द्ध ४०० तथा ५०० से चाप लगाओ जो कि एक दूसरे को स पर काटें। ब स और अ स को मिलाओ तो अ ब स एक समकोण त्रिभुज है। क्यों ? फिर चित्र की आकृति के अनुसार पूरा करो।

क्षेत्र अ च छ ब ज स भ त का क्षेत्रफल

= △अ ब स + △अ क च + समलंब ख क च छ ÷ △ब ख छ
− △ब ज स + △स भ घ + समलंब घ र त भ + △अ त र

$$= \frac{३००\times४००}{२} + \frac{६०\times१०}{२} + \frac{११०\times(१०+१२)}{२} + \frac{१००\times१२}{२}$$

$$- \frac{४००\times२०}{२} + \frac{१४०\times३०}{२} + \frac{१८०\times(२०+३०)}{२} + \frac{१८०\times२०}{२}$$

(४)

	गज	
	⊙च	
	३००	१५० घ
छ १५०	१५०	० ग
	७५	५० ख
ज १००	५०	
	⊙क	

(५)

	कड़ी	
	ख ⊙ को	
०	१००	४०
२०	६०	
	५०	१०
०	४०	३०
१०	३०	१०
	०	२०
०	क ⊙ से	

(६)

	जरीब	
	⊙ ख	
१००	४००	
	३००	७५
०	२५०	५०
	१५०	०
५०	७५	२५
	⊙क	

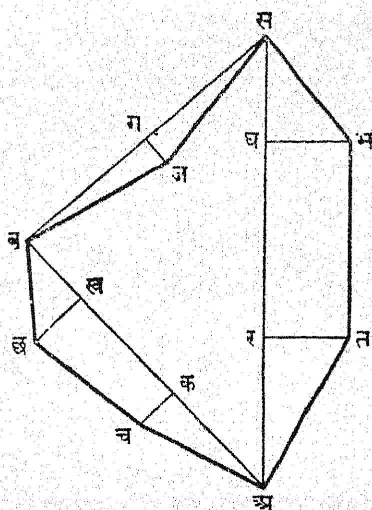
(७)

	कड़ी	
	ख ⊙ को	
५०	३००	०
	२४०	५०
	१६०	०
६०	१००	
	८०	५०
०	०	४०
	क ⊙ से	

खंड ख—नंबर २—(८) निम्नलिखित से खेत का मानचित्र खींच और क्षेत्रफल ज्ञात करो :— मापनी १ कड़ी = ५० सें० मी०

(८)

	ड़की	
	अ ⊙ को	
	५००	
त २०	३२०	
भ ३०	१४०	
	स ⊙ से	मुड़ो दक्षिण ओर
	स ⊙ को	
	४००	
	१८०	२० ज
	ब ⊙ से	उ० पू० जाओ
	ब ⊙ को	
	३००	
छ १२	२००	
च १०	६०	
	अ ⊙ से	उ० प० जाओ



या :—

एक रेखा अ ब = ३०० उत्तर पश्चिम की ओर खींचो। ब और अ को केन्द्र मानकर और व्यासार्द्ध ४०० तथा ५०० से चाप लगाओ जो कि एक दूसरे को स पर काटें। ब स और अ स को मिलाओ तो अ ब स एक समकोण त्रिभुज है। क्यों? फिर चित्र की आकृति के अनुसार पूरा करो।

क्षेत्र अ च छ ब ज स भ त का क्षेत्रफल

$= \triangle$ अ ब स $+ \triangle$ अ क च $+$ समलंब ख क च छ $\div \triangle$ ब ख छ

$- \triangle$ ब ज स $+ \triangle$ स भ घ $+$ समलंब घ र त भ $+ \triangle$ अ त र

$$= \frac{३०० \times ४००}{२} + \frac{६० \times १०}{२} + \frac{११० \times (१० + १२)}{२} + \frac{१०० \times १२}{२}$$

$$- \frac{४०० \times २०}{२} + \frac{१४० \times ३०}{२} + \frac{१८० \times (२० + ३०)}{२} + \frac{१८० \times २०}{२}$$

$= १६ \times २ \times १० \times ६ \times ३१ = १०६०२०$ वर्ग कड़ी

कुल क्षेत्र का क्षेत्रफल $= १०६०२० + \frac{५८६ \times ८०}{२} + \frac{१६१ \times ४०}{२}$

$+ \frac{२०० \times ४०}{२} - \frac{३२० \times ६०}{२} - \frac{२५० \times ६०}{२}$

$= १०६०२० + २३५६० + ३२२० + ४००० - ९६०० - ७५००$

$= १३६८०० - ७१०० = ११९७००$ वर्ग कड़ी

$= १\cdot१९७$ एकड़ उत्तर

निम्नलिखित से मानचित्र खींचो और उनका क्षेत्रफल ज्ञात करो :—

(१२)

	कड़ी	
	अ⊙को	
	४००	
	२००	
	स⊙से	
	स⊙को	
	३२०	
	३००	५०
	स⊙से	बाईं ओर जाओ
	ब⊙को	
	१४०	
	१२०	३०
	८०	२०
	अ⊙से	उत्तर पूर्व जाओ

क्षेत्रफल एकड़ में निकालो

(१३)

	कड़ी	
	⊙अ	
०	६७२	
७२	४१६	
	२९१	०
	२२६	१२
०	१४२	
३८	५५	
	⊙स	दाईं ओर मुड़ो
	⊙स	
०	६४०	
६०	५४३	
०	३०५	
३०	२२०	
	⊙ब	दाईं ओर मुड़ो
	⊙ब	
	४१६	०
	३६४	१५
	२००	२५
	⊙अ	उ०पू०जाओ

(१४)

	कड़ी	
	द ⊙ को	
	७५०	
	६३०	१६० स
य १२०	३००	
	⊙	दक्षिण ओर मुड़ो
	ब ⊙ की	
	८००	
	२००	२५० स
	अ ⊙ से	पश्चिम को जाओ

(१५)

	कड़ियाँ	
	⊙ अ को	
	५००	
	३८०	२५
	से	दक्षिण ओर मुड़
	⊙ स को	
	५००	
१७५	२००	
	⊙ ब से	दक्षिण को मुड़ो
	⊙ ब को	
	८००	
१००	६५०	
२००	४५०	
	⊙ अ से	

क्षेत्रफल एकड़ रूड
पोल में निकालो

उन्नीसवाँ अध्याय

घनफल निकालने की रीति

खण्ड (अ)

आयताकार ठोसों का आयतन

१. **ठोस** में लम्बाई, चौड़ाई और मोटाई होती है, जोकि इसका **आयत** कहलाती है।

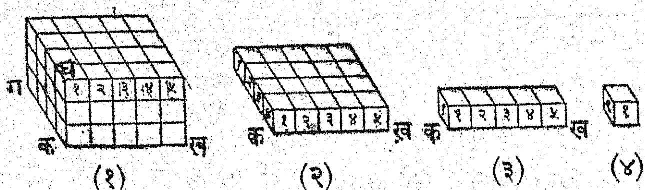
आयताकार सन्दूक, ईंट आदि आयताकार ठोस के उदाहरण हैं और इन्हीं के विषय में हम इस अध्याय में विचार करेंगे।

किसी ठोस वस्तु का **आयतन** वह स्थान है जो कि उसके सीमित तलों से घिरा होता है। प्रत्येक इकाई एक **घन** होती है जिसकी कोर इकाई की

लम्बाई अर्थात् एक इंच, एक फुट, एक गज आदि से जो उनमें सम्मिलित हों, नापी जाती है।

इसी कारण किसी घन का आयतन जिसकी कोर १ गज नाप में है, एक घन गज होता है। तथा उस घन का आयतन जिसकी कोर १ सेन्टीमीटर नाप हैं, १ घन सेन्टीमीटर होता है, तथा इसी प्रकार और भी।

२. आयताकार ठोस का आयतन ज्ञात करना, जबकि उसकी लम्बाई चौड़ाई और ऊँचाई दी हुई हों।



माना कि क ख ग घ एक आयताकार ठोस है जिसकी लम्बाई क ख = ५ फुट, चौड़ाई क ग = ४ फुट तथा ऊँचाई क घ = ३ फुट है।

क घ को चित्र (१) में ३ भाग, तथा क ख, क ग को क्रमशः ५ और ४ समान भागों में विभाजित करो और भाजन बिन्दुओं से कोरों के समान्तर समतल खींचो।

अब चित्र (२) से प्रतीत होता है कि घन तीन १ फु० ऊँचाई वाले समान परतों में विभाजित हो गया है।

प्रत्येक पर्त को जिस प्रकार चित्र (३) में दिया गया है, श्रेणियों में विभाजित करो। प्रत्येक श्रेणी ५ फुट लम्बी १ फुट चौड़ी तथा १ फुट ऊँची है।

अब प्रत्येक श्रेणी घनाकार ठोसों में विभाजित की जा सकती है जैसा कि चित्र (४) से स्पष्ट है अर्थात् वह एक घन फुट है, क्योंकि उसकी प्रत्येक कोर १ फुट है।

अब प्रत्येक पर्त में घन फुट की संख्या = ५ × ४ और क्योंकि वहाँ पर इस प्रकार के ३ पर्त हैं, इसलिये पूर्ण ठोस में घन फुट की संख्या = ५ × ४ × ३ या ६० है।

इसी प्रकार यदि लम्बाई = ल० (लम्बाई की इकाई)

चौड़ाई = चौ० (चौड़ाई की इकाई)

और ऊँचाई = ऊँ० (ऊँचाई की इकाई)

तो आयताकार ठोस का आयतन निकालने का निम्नलिखित सूत्र है :—

सूत्र :—आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

या संक्षेप में :—

(क) आयतन = ल० × चौ० × ऊँ०

जबकि (ख) $ल० = \frac{आयतन}{चौ० \times ऊँ०}$

(ग) $चौ० = \frac{आयतन}{ल० \times ऊँ०}$

(घ) $ऊँ० = \frac{आयतन}{ल० \times चौ०}$

घन का आयतन = $(भुजा)^३$

सूचना :—आयतन सर्वदा घन सेन्टीमीटर, घन इंच, घन फुट या घन गज में प्रकट किया जाता है, इत्यादि।

प्रश्नावली २६

खंड क—नम्बर१—(१) एक आयताकार ठोस का आयतन ज्ञात करो जबकि उसकी लम्बाई चौड़ाई, ऊँचाई क्रमशः १३ फु० ४ इंच, १० फुट ६ इञ्च और ४ फुट है।

क्रिया :— घनफल = ल० × चौ × ऊँ०

किन्तु ल० = १३ फुट ४ इंच = $\frac{४०}{३}$ फुट

चौ० = १० फुट ६ इंच = $\frac{२१}{२}$ फुट

ऊँ० = ४ फुट

∴ अभीष्ट आयतन = $\frac{४० \times २१ \times ४}{३ \times २}$ घन फुट = ५६० घन फुट उत्तर

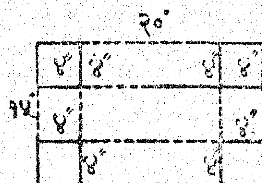
सूचना :—सब नापों को एक सी ही लम्बाई की इकाई अर्थात् गज, फुट या इञ्च इत्यादि में परिवर्तन कर लेना चाहिये।

आयताकार ठोसों के आयतन जिनके परिमाण निम्नलिखित हैं, ज्ञात करो :—

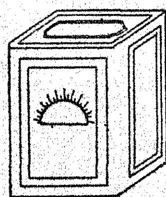
(२) लम्बाई १ फुट २ इंच, चौड़ाई १० इञ्च, ऊँचाई ८ इंच।

(३) लम्बाई ३ गज १ फुट, चौड़ाई १ गज २ फुट, ऊँचाई १ गज।

(४) टीन का एक टुकड़ा २०" लम्बा और १५" चौड़ा है। इसके चारों कोनों पर से ४" भुजा वाले वर्ग काट लिये गये और फिर मोड़कर एक चौकोर बक्स बनाया गया। इस बक्स का आयतन ज्ञात करो।



(५) सूरज मारके के मिट्टी के तेल के कनस्तर की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः ८", ८" और १२" है। यदि १ घन फुट पानी की तौल १००० औंस हो और एक गैलन पानी का भार १० पौंड हो तो कनस्तर में कितना पानी आयेगा?



नम्बर २—(६) एक आयताकार जलकुण्ड १४ फुट लम्बा और ६ फुट चौड़ा है। यदि उसमें २५२ घन फुट पानी आता हो तो उसकी गहराई ज्ञात करो।

क्रिया :—

$$\text{गहराई} = \frac{\text{आयतन}}{\text{ल०} \times \text{चौ०}} = \frac{२५२}{१४ \times ६} = २ \text{ फुट}$$ उत्तर

(७) उस कमरे की ऊँचाई ज्ञात करो जो ११ फुट लम्बा और ७ फुट चौड़ा है और उसका आयतन ११६३ घन फुट ८६४ घन इञ्च है।

(८) मेरे कमरे में २२४० घन फुट हवा आती है और उसकी ऊँचाई १३ फुट ४ इञ्च है, तो कमरे के फर्श का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

नम्बर ३—कुछ आयताकार ठोसों के निम्नलिखित मापों में से एक-एक माप मिट गया है और उसको प्रत्येक प्रश्न में फूलों (❀❀❀) से प्रकट किया गया है। मिटे हुए मापों की पूर्ति करो :—

	लम्बा	चौड़ाई	ऊँचाई	आयतन
(९)	१५' ६"	१२' २"	१२'	❀ ❀ ❀
(१०)	❀ ❀ ❀	१४ सें० मी०	११ सें० मी०	२४६४ घन सें० मी०
(११)	५ गज १ फुट	❀ ❀ ❀	१ फुट ६ इंच	४८ घन फुट
(१२)	६' ६"	५' ४"	❀ ❀ ❀	१६२ घन फुट

निम्नलिखित सारिणी के रिक्त स्थानों की पूर्ति करो :—

	फर्श का क्षेत्रफल	ऊँचाई	आयतन
(१३)	१५०वर्ग सें० मी०	❀ ❀ ❀	६०० घन सें०मी०
(१४)	❀ ❀ ❀	·५ मीटर	४·८ घन मीटर
(१५)	३६ वर्ग फुट	२ फुट ३ इंच	❀ ❀ ❀

खंड ख—नंबर ४—(१६) एक हाल की ईंट की दीवार १४ गज लंबी, १० फुट ऊँची और १ फुट मोटी है, तथा प्रत्येक ईंट चूने सहित ८ इंच लंबी, ५ इंच चौड़ी और ४ इंच मोटी है तो बताओ दीवार में कुल कितनी ईंटें लगी हैं।

क्रियाः—

दीवार की लम्बाई = १४ गज = १४ × ३ × १२ इञ्च = ५०४ इंच

चौड़ाई = १० फुट = १० × १२ इंच = १२० इंच

मोटाई = १ फुट = १ × १२ इंच = १२ इंच

∴ दीवार का आयतन = ५०४ × १२० × १२ घन इञ्च

इसी प्रकार ईंट का आयतन = ८ × ५ × ४ घन इञ्च

अब ८ × ५ × ४ घन इंञ्च स्थान घेरती है १ ईंट

∴ १ घन इञ्च स्थान घेरती है $\frac{१}{८ \times ५ \times ४}$ ईंट

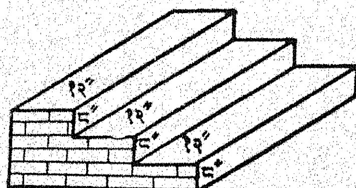
∴ ५०४ × १२० × १२ घन इंञ्च स्थान घेरती हैं

$\frac{५०४ \times १२० \times १२}{८ \times ५ \times ४}$ = ४५३६ ईंटें उत्तर

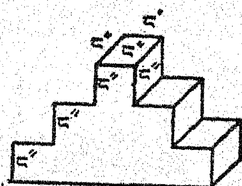
सूत्र—ईंटों की संख्या = $\frac{\text{दीवार का आयतन}}{\text{१ ईंट का आयतन}}$

(१७) यदि एक विद्यार्थी को १४ घन फुट वायु की आवश्यकता हो, तो २८ फुट लम्बे, २२ फुट चौड़े और २४ फुट ऊँचे कमरे में कितने विद्यार्थी पढ़ सकते हैं ?

(१८) चित्र में तीन सीढ़ियों के जीने का एक किनारा दिखाया गया है। प्रत्येक सीढ़ी की चौड़ाई १२′ और ऊँचाई ८″ है। जीना ५′ लम्बा है। बताओ इस जीने के बनाने में ९″ × ५″ × २″ माप की कितनी ईंटें लगी होंगी।



(१६) यह एक देश भक्त के स्मारक का चित्र है और आवश्यक माप इंचों में दिये हुए हैं। यदि यह ८″×४″×३″ माप की ईंटों से बनाया गया हो तो इसमें कितनी ईंटें लगी होंगी।



नंबर ५—(२०) हाकी के किसी १०० गज लंबे तथा ८० गज चौड़े फील्ड को कितनी गहराई तक खोदा जाये, कि खुदी हुई मिट्टी से २०,००० घन गज का एक पुश्ता बन जाये, जबकि मिट्टी के खुदवाने पर उसके आयातन में $\frac{१}{९}$ भाग की वृद्धि हो जाती है ?

क्रिया :—मिट्टी खोदने से उसके आययन में $\frac{१}{९}$ की वृद्धि हो जाती है अर्थात्

. मिट्टी खुदने पर अपने आयतन का $\frac{१०}{९}$ स्थान घेरती है।

∴ खुदने वाली मिट्टी का आयतन

$= २०,०००$ घन गज का $\frac{९}{१०} = १८०००$ घन गज गज

परन्तु फील्ड की लम्बाई = १०० गज तथा चौड़ाई = ८०

$$\therefore \text{अभीष्ट गहराई} = \frac{\text{आयतन}}{\text{ल०} \times \text{चौ०}}$$

$$= \frac{१८०००}{१०० \times ८०} = २\frac{१}{४} \text{ गज} \qquad \text{उत्तर}$$

(२१) दिल्ली के लाल किले के १०० फुट लम्बे तथा ८० फुट चौड़े मैदान के बीच में २५ फुट लम्बा, २० फुट चौड़ा तथा १० फुट गहरा एक गड्ढा खुदवाया गया और इस प्रकार खुदी हुई मिट्टी को मैदान के शेष भाग पर फैला दिया गया। खुदी हुई मिट्टी के आयतन में उसके $\frac{१}{५}$ भाग के बराबर बढ़ोतरी हो गई। फैली हुई मिट्टी की ऊँचाई बताओ।

(२२) लोहे का एक टुकड़ा जो ४ फुट लम्बा, $२\frac{१}{४}$ फुट चौड़ा तथा ६ इंच मोटा है, गांधी पार्क के ६ फुट लम्बे तथा $४\frac{१}{२}$ फुट चौड़े हौज में जिसमें कुछ पानी था, डाला गया। बताओ कि पानी का तल उसके डूबने पर कितना उठ गया।

(२३) पटेल विद्यालय का आयताकार कुंड ३० फुट लम्बा तथा ५० फुट गहरा है। यदि उसमें से १०८० घन फुट पानी निकाल लिया जाये, तो पानी की सतह ३ फुट कम हो जाती है। बताओ कि उस कुंड में कितने घन फुट पानी आ सकता है।

खंड ग—नंबर ६—(२४) एक बन्द सन्दूक की बाहरी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः ४ फुट २ फुट तथा १६ इंच है। यदि लकड़ी जिससे वह बना है १ इंच मोटी हो, तो बताओ कि

(१) उसमें कितने घन फुट वायु है।

(२) लकड़ी का आयतन कितना है।

(३) ३ आने प्रति वर्ग फुट की दर से उसके अन्दर व बाहर की रंगाई में क्या व्यय होगा।

क्रिया :—(१) अन्दर की लम्बाई

$= ४$ फुट $- २$ इंच $= ३$ फुट १० इंच $= \frac{२३}{६}$ फुट

अन्दर की चौड़ाई

$= २$ फुट $- २$ इंच $= १$ फुट १० इंच $= \frac{११}{६}$ फुट

अन्दर की गहराई

$= १६$ इंच $- २$ इंच $= १४$ इंच $= \frac{७}{६}$ फुट

∴ सन्दूक के अन्दर का आयतन या उसके अन्दर की हवा

$$= \frac{२३ \times ७ \times ११}{६ \times ६ \times ६} = \frac{१७७१}{२१६} = ८ \text{ घन फुट } ३४४ \text{ घन इञ्च}$$

(२) सन्दूक का बाहरी आयतन $= ४ \times २ \times \frac{४}{३} = \frac{३२}{३}$ घन फुट

और अन्दर का आयतन $= \frac{१७७१}{२१६}$ घन फुट

∴ सन्दूक की लकड़ी का आयतन

= बाहरी आयतन − अन्दर का आयतन

$$= \frac{३२}{३} - \frac{१७७१}{२१६} = \frac{५३३}{२१६} = ४२६४ \text{ घन इञ्च}$$

(३) सन्दूक का बाहरी तल

$=$ ४ भुजाओं का क्षेत्रफल $+$ २ $\times$ तल का क्षेत्रफल

$=$ २ (ल $+$ च) $\times$ ऊँ $+$ २ $\times$ ल $\times$ च

$=$ २ (४ $+$ २) $\times \frac{४}{३} +$ २ $\times$ ४ $\times$ २

$=$ (१६ $+$ १६) वर्ग फु० $=$ ३२ वर्ग फु०

सन्दूक का अन्दर का तल

$=$ २ $\left(\frac{२३}{६} + \frac{११}{६}\right) \times \frac{७}{६}$ वर्ग फु० $+$ २ $\times \frac{२३}{६} \times \frac{११}{६}$ वर्ग फु०

$= \frac{११९}{९}$ वर्ग फु० $+ \frac{२५३}{१८}$ वर्ग फु० $= \frac{४९१}{१८}$ वर्ग फुट

∴ कुल रंगा जाने वाला क्षेत्रफल

$= \left(३२ + \frac{४९१}{१८}\right)$ वर्ग फु० $= \frac{१०६७}{१८}$ वर्ग फुट

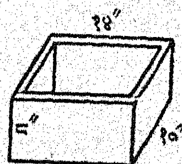
∴ सन्दूक के अन्दर और बाहर ३ आ० प्रति वर्ग फुट की दर से रँगाई का व्यय

$= \frac{१०६७ \times ३}{१८ \times १६} = \frac{१०६७}{९६}$ रु० $=$ ११ रु० १ आ० १० पा० **उत्तर**

(२५) एक बन्द सन्दूक की बाहरी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः ५ फुट, ४ फुट और ३ फुट हैं। सन्दूक ३″ मोटे तख्तों का बना हुआ है। यदि १ घन फुट तख्ते का मूल्य १ रु० ८ आना हो तो सन्दूक में लगी हुई लकड़ी का मूल्य बताओ।

(२६) यदि आध इञ्च मोटी चादर का एक बन्द सन्दूक, जिसके अन्दर के माप २०, १५, ९ इञ्च हैं, बनवाना हो तो बताओ कि उनमें कितने घन इञ्च लोहे की आवश्यकता होगी।

(२७) यदि किसी खुले हुए सन्दूक की भुजाएँ $\frac{१}{२}$ इञ्च मोटी हैं, तथा उसकी तली १ इं० मोटी है और उसकी बाहरी माप १४, १०, ८ इञ्च हैं तो बताओ कि उसका आयतन कितना है, और उसके बनने में कितना सामान लगा है।



नंबर ७—(२८) तिलक नगर जलकुंड में जिसके अन्दर के माप ६ फुट, ५ फुट तथा ४ फुट हैं, ५० घन फुट पानी है। उसके ऊपर भरने तक

उसमें सूराखदार ईंटें डाली गईं। यदि प्रत्येक ईंट अपने आयतन का $\frac{१}{१६}$ भाग पानी सोख लेती हो, तथा उसका माप ६×४×२$\frac{१}{२}$ घन इंच हो तो बताओ कि उसमें कितनी ईंटें डाली गई हैं।

क्रिया :—जलकुण्ड का आयतन=६×५×४ घन फुट=१२० घन फुट

जलकुण्ड में पानी का आयतन=४० घन फुट

∴ जलकुण्ड में उस जगह का आयतन जो ईंटें बिना पानी सोखे हुए घेरेंगी

=(१२०−४०) घन फुट=८० घन फुट

किन्तु ईंटें सूराखदार हैं और वह अपने आयतन का $\frac{१}{१६}$ भाग पानी सोख लेती हैं इसलिए वहाँ पर उनके लिए ८० घन फुट से अधिक स्थान होगा।

∴ ईंटों से घिरे हुए स्थान का आयतन

=$\frac{१७}{१६}$×८० घन फुट =८५ घन फुट

परन्तु एक ईंट का आयतन=$\frac{१}{२}\times\frac{१}{३}\times\frac{५}{२४}=\frac{५}{१४४}$ घन फुट

∴ अभीष्ट ईंटों की संख्या=८०÷$\frac{५}{१४४}$=८०×$\frac{१४४}{५}$=२३०४

उत्तर

(२९) एक कौआ अपनी प्यास बुझाने को एक बर्तन के पास जिसमें २० घन इञ्च पानी आता है। चोंच पानी तक न पहुँचने के कारण वह सूराखदार ईंटों के टुकड़े जो नाप में $\frac{१}{३}$ घन इञ्च हैं और जो अपने अन्दर अपने आयतन का $\frac{१}{११}$ भाग पानी सोख लेते हैं, उस पानी के बर्तन में डाल देता है यहाँ तक कि पानी ऊपर सतह तक आ जाता है। यदि उस बर्तन में ७५ घन इञ्च पानी आता हो तो ईंटों के टुकड़ों की संख्या बताओ।

(३०) देहरादून के कागज के कारखाने का आयताकार जल कुन्ड ८ फुट लम्बा, ६ फुट चौड़ा, और ५ फुट गहरा है। वह कागज बनाने के गूदे से भरा हुआ है। गूदे के सूखने पर उसका आयतन $\frac{३}{४}$ भाग कम हो जाता है। बताओ कि उस गूदे से २० इञ्च लम्बे तथा १५ इञ्च चौड़े कितने कागज के तख्ते बन सकते हैं जबकि ५०० तख्तों की मोटाई १ इञ्च है।

नंबर ८—(३१) सार्वजनिक पुस्तकालय हरिद्वार का रीडिंग रूम ३० फुट लंबा २५ फुट चौड़ा तथा २० फुट ऊँचा है। उसमें हवा जाने के लिए एक आयताकार रोशनदान २० इंच लम्बा तथा १५ इंच चौड़ा है। यदि कमरे की वायु का $\frac{३}{५}$ भाग प्रति आधा घंटा बदल जाता हो तो बताओ कि रोशनदान में से हवा प्रति मिनट किस चाल से गुजरती है।

क्रिया :—कमरे की हवा का आयतन $= ३० \times २५ \times २० = १५०००$ घ० फु०

उस हवा की आयतन जो प्रति आधा घंटा बदलती है

$= १५००० \times \frac{३}{५} \quad = ९०००$ घ० फुट

उस हवा का आयतन जो प्रति मिनट बदलती है

$= \frac{९०००}{३०} \quad = ३००$ घ० फु०

रोशनदान का क्षेत्रफल $= \frac{२०}{१२} \times \frac{१५}{१२} \quad = \frac{२५}{१२}$ वर्ग फु०

∴ कमरे में प्रति मिनट हवा बदलने की चाल

$= ३०० \div \frac{२५}{१२}$ फुट

$= ३०० \times \frac{१२}{२५} \quad = १४४$ फुट उत्तर

(३२) २५ फुट लम्बे २० फुट चौड़े तथा १५ फुट ऊँचे हाल में वायु के लिये १६ इञ्च लम्बा तथा १० इञ्च चौड़ा झरोखा है। यदि कमरे की वायु का $\frac{२}{५}$ भाग प्रति घंटा बदल जाता हो तो झरोखे से आने वाली वायु की गति प्रति मिनट ज्ञात करो।

(३३) एक आयताकार तालाब ८८ फुट लम्बा, ३० फुट चौड़ा तथा ४ फुट गहरा है। उसमें पानी एक नल द्वारा जिसके मुँह की लम्बाई १६ इञ्च तथा चौड़ाई ६ इञ्च है भरा जाता है। यदि पानी की चाल ४ मील प्रति घंटा हो तो तालाब कितनी देर में भर जायगा ?

(३४) एक मैदान ३०० गज लम्बा और ७५ गज चौड़ा है। उसको कितनी गहराई तक खोदा जाय कि उससे निकली हुई मिट्टी से २५००० घ० गज का बाँध बन जावे जबकि मिट्टी अपने आयतन का $\frac{१}{९}$ भाग खोदने से बढ़ जाती है।

(उ० प्र०, १९३६)

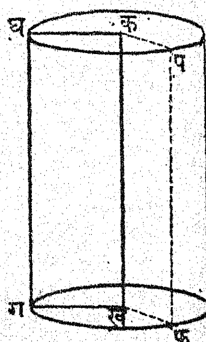
(३५) एक सन्दूकची $\frac{1}{8}$ इञ्च मोटी लकड़ी की बनी है। उसका बाहरी परिमाण ६$\frac{3}{8}$ इञ्च, ६ इञ्च, और ७$\frac{1}{8}$ इञ्च है। उसका भार बताओ जबकि वैसी ही ६ घन इञ्च लकड़ी का भार ६ औंस है। (देहली, १९५०)

खण्ड (ब)

दक्षिण लंबवर्तुल बेलन

१. किसी आयत को उसकी एक भुजा के (जो स्थिर है) चारों ओर घुमाने से बनी हुई ठोस आकृति को **लंबवर्तुल** बेलन कहते हैं।

इस प्रकार यदि आयत क ख ग घ एक पूरा चक्कर क ख को धूरी बनाकर लगावे तो सम्मुख भुजा ग घ बेलन की वक्रतल बनायेगी और संलग्न भुजाएँ क घ और ख ग दोनों सिरे या आधार बनायेंगी जो कि बराबर होते हैं। धुरी क ख की लम्बाई बेलन की ऊँचाई कहलाती है।



२. बेलन का आयतन ज्ञात करना।

क्रिया:—यदि लंबवर्तुल बेलन के चारों ओर कागज का एक टुकड़ा बेलन की ऊँचाई के बराबर ऊँचा कस कर इस प्रकार लपेट दें कि उसके दोनों किनारे आपस में स्पर्श करें, और फिर कागज को खोल दें तो कागज का वह टुकड़ा एक आयत बन जायगा जिसकी ऊँचाई बेलन की ऊँचाई के और लम्बाई की परिधि के बराबर होगी।

(अ) ∴ **बेलन का वक्रतल** = वक्रतल के खुलने से बनने वाले आयत का क्षेत्रफल

= आधार की परिधि × ऊँचाई

= २πर × ऊँ = २πर ऊँ वर्ग इकाई

जिससे, व्यासार्द्ध र = $\frac{\text{वक्रतल}}{\text{२πऊँ}}$

और, ऊँचाई $ऊँ = \frac{वक्रतल}{२\pi र}$

(ब) बेलन का समस्त तल = वक्रतल + सिरों का क्षेत्रफल

$= २\pi रऊँ + २\pi र^२ = २\pi र\,(ऊँ + र)$ वर्ग इकाई

(स) बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$= \pi र^२ ऊँ$ घन इकाई

जिससे, व्यासार्द्ध $र = \sqrt{\frac{आयतन}{\pi ऊँ}}$ ऊँचाई $ऊँ = \frac{आयतन}{\pi र^२}$

प्रश्नावली ३०

खंड क-नंबर १—(१) उस दक्षिण लंबवर्तुल बेलन का वक्रतल और समस्त तल बताओ जिसकी ऊँचाई ८ इंच हो और आधार का व्यास ७ इंच हो।

क्रिया :—वक्रतल $= २\,\pi\,र\,ऊँ$

$= २ \times \frac{२२}{७} \times \frac{७}{२} \times ८$ वर्ग इञ्च

$= १७६$ वर्ग इञ्च उत्तर

समस्त तल $= २\,\pi\,र\,(र + ऊँ)$

$= २ \times \frac{२२}{७} \times \frac{७}{२} \times (\frac{७}{२} + ८)$

$= २ \times \frac{२२}{७} \times \frac{७}{२} \times \frac{२३}{२}$

$= २५३$ वर्ग इञ्च उत्तर

(२) उस बेलनाकार बोट का वक्रतल बताओ जिसका व्यास ८ इञ्च और ऊँचाई १४ इञ्च हो।

(३) उस बेलनाकार रूलर का वक्रतल बताओ जिसका व्यासार्द्ध ६ इञ्च और लम्बाई १ फुट ६ इञ्च हो।

(४) यदि किसी वृत्ताकार टंकी के आधार का व्यासार्द्ध से १ फुट ८ इञ्च हो और गहराई ५ फुट ४ इञ्च हो तो समस्त तल क्या होगा ?

(५) एक लंबवर्तुल बेलन के समस्त तल पर रोगन कराने में ५ पैंस प्रति वर्ग सें० मी० से क्या व्यय होगा यदि उसका व्यास २८ सें० मी० और ऊँचाई २२ सें० मी० हो।

(६) एक किसान ने ३ गज लम्बे ३ फुट ६ इञ्च चौड़े बेलनाकार रोलर को अपने खेत में १६० बार घुमाया। रोलर द्वारा दबाये गये क्षेत्र का क्षेत्रफल गजों में ज्ञात करो।

नंबर २—(७) उस बेलनाकार खंभे का आयतन बताओ जिसकी ऊँचाई ४ गज २ फुट और आधार का व्यास ३ फुट हो।

क्रिया :—आयतन $= \pi र^2$ ऊँ $= \frac{२२}{७} \times (\frac{३}{२})^2 \times १४$

$= \frac{२२}{७} \times \frac{९}{४} \times १४ = ९९$ घन फुट उत्तर

निम्नलिखित लंबवर्तुल बेलनों का आयतन बताओ यदि उनकी माप इस प्रकार हों :—

(८) व्यास = ४ सें० मी० और ऊँचाई = १० सें० मी० ५ मिलीमीटर।

(९) आधार का व्यासार्द्ध = ३ फुट ६ इञ्च और ऊँचाई = १ फुट ४ इञ्च।

(१०) आधार का घेरा = २ फुट ९ इञ्च और ऊँचाई = ५ फु० ४ इञ्च

खंड ख—नंबर ३—(११) २·२ घन फुट चाँदी को खींचकर $\frac{१}{५}$ इंच व्यास का बेलन के आकार का तार बनाया गया। तो तार की लम्बाई ज्ञात करो।

क्रिया :—तार का व्यासार्द्ध $= \frac{१}{५} \times \frac{१}{२} = \frac{१}{१०}$ इञ्च $= \frac{१}{१२०}$ फु०

तार का आयतन $= \pi र^2$ ऊ

$$= \frac{२२}{७} \times \left(\frac{१}{१२०}\right)^2 \times \text{ऊँ}$$

∴ प्रश्न के अनुसार,

$$\frac{२२}{७} \times \frac{१}{१२०} \times \frac{१}{१२०} \times \text{ऊँ} = \quad २·२ = \frac{२२}{१०}$$

$$\therefore \quad \text{ऊँ} = \frac{७ \times १२० \times १२० \times २२}{२२ \times १०} \text{ फु०}$$

$= १००८०$ फुट $= ३३६०$ गज उत्तर

(१२) उस बेलनाकार ढोल के आधार का क्या व्यास होगा। उसकी ऊँचाई १ फुट ६ इञ्च है, और जिसके वक्र तल पर रोगन कराने का व्यय ४ आ० प्रति वर्ग फु० से २२ रु० है।

(१३) उस लंबवर्तुल बेलन की ऊँचाई बताओ जिसका समस्त तल ८८० वर्ग फुट और व्यासार्द्ध ७ फुट हो।

(१४) एक बेलन की आकृति की मीनार का आयतन जिसके आधार का व्यास ४ मीटर हो, २४२ घन मीटर है। उसकी ऊँचाई बताओ।

(१५) एक २२ फुट × १८ फुट आयताकार घेर के बीच ८ फुट ३ इञ्च गहरा और १४ फु० चौड़ा गोल कुँआ खोदा गया और इस प्रकार खुदी हुई मिट्टी को घेर के शेष भाग पर फैला दिया गया। तो बताओ कि घेर का तल कितना ऊँचा उठ गया।

(१६) एक लोहे की गोल छड़ ८ फुट लम्बी है और उसका भार १५ पौंड ६ औंस है। उसकी मोटाई क्या होगी यदि १ घन इञ्च लोहे का भार ५·८ औंस हो ?

नंबर ४—(१७) एक लोहे की मोटी खोखली नली के गोल घेरे के बाह्य वृत्त का व्यासार्द्ध ८ फुट है और अन्तः वृत्त का व्यासार्द्ध ६ फुट है। यदि नली की मोटाई ३ इंच हो तो उस घेरे का आयतन बताओ।

क्रिया :—घेरे का आयतन

= बाह्य बेलन का आयतन—अन्तः बेलन का आयतन

$= (\pi \text{य}^{२} - \pi \text{र}^{२})$ ऊँ०

$= \pi (\text{य} + \text{र}) (\text{य} - \text{र})$ ऊँ०

$= \frac{२२}{७} (८ + ६) (८ - ६) \times \frac{३}{१२}$

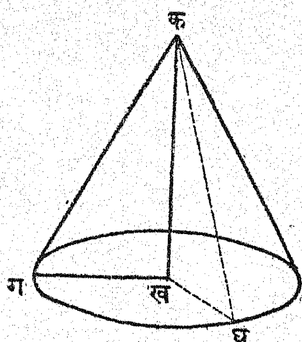
$= \frac{२२}{७} \times १४ \times २ \times \frac{३}{१२} = २२$ घन फु० **उत्तर**

(१८) एक गोल नल की मोटाई १ इञ्च है। उसका बाह्य व्यास २२ इंच है। यदि नल की ऊँचाई ३० इञ्च हो तो नल के बनाने में कितने घन इञ्च धातु लगी होगी ?

(१६) यदि १४ इञ्च ऊँचे गोले पाइप की मोटाई ८ इञ्च हो और अन्दर का व्यास २६ इञ्च हो तो पाइप में कितनी धातु लगी होगी ?

खंड (स)

दक्षिण लम्बवर्तुल शंकु



१. समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली भुजाओं में से किसी एक भुजा के (जो स्थिर रहती है) चारों ओर घुमाने से बनी हुई ठोस, आकृति को लंबवर्तुल शंकु कहते हैं।

स्थिर भुजा को शंकु की धुरी कहते हैं।

इस प्रकार यदि त्रिभुज क ख ग, क ख के चारों ओर एक पूरा चक्कर काटे तो कर्ण क ग शंकु को वक्रतल बनायेगा और दूसरी भुजा ख घ एक वृत्त बनायेगी जिसका व्यासार्द्ध ख ग होगा। यह वृत्त उसका आधार कहलाता है। धुरी क ख की लम्बाई शंकु की ऊँचाई कहलाती है और कर्ण क ग की लम्बाई शंकु की तिरछी ऊँचाई कहलाती है।

टिप्पणी :—प्रश्नों में ऊँचाई = उ, व्यास = व, व्यासार्द्ध = २ र, तिरछी ऊँचाई = ल।

२. शंकु का तल तथा आयतन ज्ञात करना।

क्रिया :—(१) शंकु का वक्रतल = (आधार का घेरा) × तिरछी ऊँचाई

$= \frac{१}{२} \times २\pi र \times ल$

$= \pi र ल$ वर्ग इकाई

$$\text{जिससे, } र = \frac{\text{वक्रतल}}{\pi ल}, \text{ और } ल = \frac{\text{वक्रतल}}{\pi र}$$

(२) शंकु का समस्त तल = वक्रतल + आधार का क्षेत्रफल

$= \pi र ल + \pi र^{२} = \pi र (ल + र)$ वर्ग इकाई

$= \pi$ र (ल + र) वर्ग इकाई

और तिरछी ऊँचाई $= \sqrt{\text{ऊँचाई}^2 + \text{व्यासार्द्ध}^2}$

या, ल $= \sqrt{\text{ऊँ}^2 + \text{र}^2}$

(३) शंकु का आयतन

$= \frac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल) × ऊँचाई

$= \frac{1}{3} \pi \text{ र}^2 \times \text{ऊँ}$

$= \frac{1}{3} \pi \text{ र}^2$ धन इकाई

जिससे, व्यासार्द्ध $= \sqrt{\frac{3 \times \text{आयतन}}{\pi \text{ ऊँ}}}$

और ऊँचाई ऊँ $= \frac{3 \times \text{आयतन}}{\pi \text{ र}^2}$

प्रश्नावली ३१

खंड क—नंबर १—(१) दक्षिण लंबवर्तुल शंकु का वक्र तथा समस्त तल बताओ जिसके आधार का व्यासार्द्ध ६ सें० मी० और लंबवत् ऊँचाई ८ सें० मी० है।

क्रिया :—

तिरछी ऊँचाई $= \sqrt{\text{र}^2 + \text{ऊँ}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64}$

$= \sqrt{100} = 10$ सें० मी०

वक्रतल $= \pi$ र ल

$= \frac{22}{7} \times 6 \times 10 = \frac{1320}{7} = 188\frac{4}{7}$ वर्ग सें० मी० उत्तर

समस्त तल $= \pi$ र (ल + र) $= \frac{22}{7} \times 6 \times (10 + 6)$

$= \frac{22}{7} \times 6 \times 16 = \frac{2112}{7} = 301\frac{5}{7}$ वर्ग सें० मी० उत्तर

निम्नलिखित शंकुओं का वक्रतल और समस्त तल बताओ :—

(२) आधार का व्यास = ४ गज २ फुट, तिरछी ऊँचाई = ६ गज

(३) आधार का व्यासार्द्ध = ७ इञ्च, तिरछी ऊँचाई = ४० इञ्च

(४) आधार का व्यासार्द्ध = ५′ और लम्बवत् ऊँचाई = १२″

(५) तिरछी ऊँचाई = २ फुट १ इञ्च और लम्बवत् ऊँचाई = २ फुट

(६) एक शंकुवाकार डेरे के लिए जिसकी लम्बवत् ऊँचाई १० फुट और आधार का व्यासार्द्ध ६$\frac{१}{२}$ फुट है, कितने वर्ग फुट मोमजामा चाहिए ?

नंबर २—(७) उस लंबवर्तुल शंकु का आयतन बताओ जिसके आधार का व्यास ४·२ इञ्च और लंबवत् ऊँचाई १० इञ्च हो।

क्रिया :—आयतन = $\frac{१}{३}\pi$ र² ऊँ०

= $\frac{१}{३}\times\frac{२२}{७}\times(२·१)^२\times १०$ घन इं०

= $\frac{१}{३}\times\frac{२२}{७}\times २·१\times २·१\times १० = ४६·२$ घन इं० उत्तर

निम्नलिखित शंकुओं का आयतन बताओ :—

(८) आधार का व्यास = ७ इञ्च और लम्बवत् ऊँचाई = ८ फुट

(९) आधार का व्यासार्द्ध = २ फुट ११ इञ्च, और लम्बवत् ऊँचाई = १२ फुट।

(१०) एक लंबवर्तुल शंकु का आयतन बताओ जिसके आधार का व्यासार्द्ध ६ सें० मी० और तिरछी ऊँचाई ६$\frac{१}{२}$ सें० मी० हो।

खण्ड ख—नंबर ३—(११) उस लंबवर्तुल शंकु के आधार का व्यास ज्ञात करो जिसकी वक्रतल १५४० वर्ग गज हो और तिरछी ऊँचाई ५६ गज हो।

क्रिया :—व्यासार्द्ध = $\frac{\text{वक्रतल}}{\pi\text{ल}}$

= $\frac{१५४०}{\frac{२२}{७}\times ५६} = \frac{१५४०}{२२\times ८} = ८\frac{३}{४}$ गज

∴ व्यास = $२\times ८\frac{३}{४} = १७\frac{१}{२}$ गज उत्तर

(१२) उस शंकु के आधार का व्यासार्द्ध बताओ जिसका वक्रतल १६५ वर्ग फुट और तिरछी ऊँचाई ३ गज है।

(१३) उस शंकुवाकार डेरे की तिरछी ऊँचाई क्या होगी जिसका वक्रतल ३३० वर्ग इञ्च है और आधार का व्यासार्द्ध ३$\frac{१}{२}$ इञ्च है ?

(१४) उस शंकुवाकार डेरे का व्यासार्द्ध बताओ जिसमें १३८६ घन फुट हवा आ सकती हो और जिसकी लम्बवत् ऊँचाई २७ फुट हो।

(१५) एक शंकुवाकार डेरे में १४ आदमी रखने हैं। यदि प्रत्येक आदमी को ४४ वर्ग फुट स्थान पृथ्वी पर चाहिये और १३२ घन फुट हवा साँस लेने के लिए चाहिए, तो उस डेरे की चौड़ाई और लम्बवत् ऊँचाई बताओ।

(१६) एक टीन का टुकड़ा $\frac{१}{४}$ वृत्त खंड (पाद) की आकृति का है। उसको मोड़कर एक शंकु के आकार का प्याला बनाया गया है। यदि पाद का व्यासार्द्ध १० फुट हो तो प्याले का आयतन ज्ञात करो।

(१७) यदि एक लंबवर्तुल शंकु का व्यासार्द्ध २१ इञ्च तथा तिरछी ऊँचाई १८ फुट हो तो उसके वक्रतल पर ६ आने प्रति वर्ग फुट की दर से रोगन कराने में क्या व्यय होगा ?

(१८) उस बड़े से बड़े शंकु का आयतन बताओ जो कि उस घन में से काटा जा सकता हो जिसकी कोर ७ इञ्च है।

[संकेत :—शंकु का आधार वह वृत्त होगा जो कि घन के एक तल में बन सकता है। इसलिये आधार का व्यासार्द्ध घन की कोर का आधा होगा, और शंकु की लम्बवत् ऊँचाई घन की कोर के बराबर होगी।]

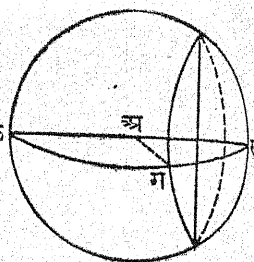
(१९) बेलन की आकृति की एक छड़ी $\frac{१}{३}$ इञ्च मोटी है। उसके एक सिरे को छीलकर उसको शंकुवाकार बना दिया गया है जिसकी तिरछी ऊँचाई $\frac{५}{१८}$ इञ्च है। तो बताओ छीलने में कितनी लकड़ी खराब गई होगी।

(२०) एक उल्टे शंकु के आकार के बरतन में पानी एक बेलनाकार नली द्वारा आ रहा है। यदि शंकु का व्यासार्द्ध २५ सें० मी० और गहराई १५ सें० मी० हो और नल का व्यासार्द्ध २$\frac{१}{२}$ मिलीमीटर हो और पानी का बहाव ५०० सें० मी० प्रति मिनट हो तो शंकु कितने समय में भर जायगा ?

(खण्ड द)

गोले

१ यदि कोई अर्द्ध-वृत्त अपने व्यास के (जो स्थित होता है) चारों ओर पूरा चक्कर लगाये तो एक ठोस बनता है जिसको **गोला** कहते हैं। व्यास के मध्य बिन्दु को गोले का केन्द्र कहते हैं।



इस प्रकार यदि अर्द्ध-वृत्त क ख ग व्यास क ख के चारों ओर चक्कर काटे तो अर्द्ध घेरा क ग ख एक गोले का तल बनाता है जिस पर प्रत्येक बिन्दु उसके केन्द्र अ से एक नियत अन्तर पर रहता है। अ गोले का केन्द्र है।

अ ग (एक सरल रेखा जोकि केन्द्र से बाह्य तल तक खींची जाती है) गोले का **व्यासार्द्ध** कहलाती है। क ख (एक सरल रेखा जो कि केन्द्र से बाह्य तल तक दोनों ओर खींची जाती है) गोले का **व्यास** कहलाती है।

टिप्पणी :—फुटबाल गोले का एक ज्ञात उदाहरण है।

२. गोले का तल ज्ञात करना यदि व्यास = ब और व्यासार्द्ध = २ र

गोले का तल

$= ४\pi र^२$ वर्ग इकाई $= \pi$ $व^२$ वर्ग इकाई [∵ व = २ र]

नियम :—व्यास के वर्ग को ३·१४१६ से गुणा करने से गोले का तल आ जाता है।

जिससे, $२ र = व = \sqrt{\frac{तल}{\pi}}$

३. गोले का आयतन ज्ञात करना।

गोले का आयतन = गोले के तल का क्षेत्रफल $\times \frac{र}{३}$

$= ४\pi र^२ \times \frac{र}{३} = \frac{४}{३}\pi र^३ = \frac{१}{६}\pi व^३$

नियम :— व्यास के घन को π से गुणा करो और ६ से भाग दो। भागफल गोले का आयतन होगा।

जिससे, २ र = व = $\sqrt{\frac{६ \times \text{आयतन}}{\pi}}$

प्रश्नावली ३२

खंड क—नम्बर १—(१) उस गेंद का तल बताओ जिसका व्यासार्द्ध ७ सें० मी० है।

क्रिया :—गेंद का तल $= ४\pi र^२$

$= ४ \times \frac{२२}{७} \times (७)^२$ वर्ग सें० मी०

$= ६१६$ वर्ग सें० मी० उत्तर

(२) उस गोले का तल बताओ जिसका व्यासार्द्ध १ फुट २ इञ्च है।

(३) उस गोले का तल क्या होगा जिसका व्यास ३ फुट ६ इञ्च है ?

(४) एक गोलाकार गुंबज के ऊपर रोगन कराने में ८ आने प्रति वर्ग फुट की दर से क्या व्यय होगा यदि उसका व्यास १ फुट ६ इञ्च हो ?

(५) किसी लकड़ी के प्याले का आकार अर्द्ध गोलाकार है यदि उसका व्यासार्द्ध १०½ इञ्च है तो उसके वाह्य भाग पर ४ पेंस प्रति वर्ग इ० की दर से रोगन कराने में क्या लगेगा ?

नंबर २—(६) एक गोले का आयतन ज्ञात करो जिसका व्यासार्द्ध ३½ फुट है।

क्रिया :—गोले का आयतन $= \frac{४}{३} \pi र^३$

$= \frac{४}{३} \times \frac{२२}{७} \times (\frac{७}{२})^३$ घन फुट

$= \frac{४}{३} \times \frac{२२}{७} \times \frac{७ \times ७ \times ७}{२ \times २ \times २}$

$= \frac{५३९}{३} = १७९\frac{२}{३}$ घन फुट उत्तर

(७) उस गुब्बारे में कितनी वायु आती है जिसका व्यास ७ फुट है ।

(८) उस अर्द्ध-गोलाकार कटोरे का आयतन क्या होगा जिसका व्यासार्द्ध २·१ इञ्च है ?

(९) किसी ३ इञ्च व्यासार्द्ध के धातु के गोले में से $\frac{1}{2}$ इञ्च व्यास वाली कितनी गोलियाँ ढाली जा सकती हैं ?

(१०) एक खोखली लोहे की गेंद १ इञ्च मोटी चादर की बनी है। यदि उसका अन्तः व्यास १० इञ्च हो तो उसके बनाने में कितनी धातु लगी होगी ?

(११) ११ इञ्च लम्बे, ८ इञ्च चौड़े, ५ इञ्च मोटे सीसे के टुकड़े में से $\frac{1}{2}$ इञ्च व्यासार्द्ध की कितनी गोलियाँ बन सकती हैं ?

खंड ख ३—नम्बर (१२) उस गोले का व्यासार्द्ध ज्ञात करो जिसका आयतन ३८१$\frac{६}{७}$ घन गज है।

क्रिया :—गोले का आयतन

$$= \frac{१}{६} \pi व^३ = ३८१\frac{६}{७} = \frac{२६७३}{७} \text{घन गज}$$

$$\therefore व^३ = \frac{६ \times २६७३}{७} \times \frac{७}{२२} = ७२९$$

$$\therefore व = \sqrt[३]{७२९} = \sqrt[३]{९ \times ९ \times ९} = ९ \text{ फुट}$$

$$\therefore \text{व्यास} = ९ \text{ फुट}$$

$$\therefore \text{व्यासार्ध} = \frac{९}{२} \text{फुट} = ४ \text{ फुट } ६ \text{ इञ्च}$$ उत्तर

(१३) उस गोले का व्यासार्द्ध बताओ जिसका आयतन १७९ घन फुट ११५२ घन इञ्च है।

(१४) उस गुब्बारे का व्यास बताओ जिसमें ४८५१ घन सें० मी० वायु आती है।

(१५) यदि किसी गोले का तल १३८६ वर्ग फुट हो तो उसका व्यास क्या होगा

(१६) उस गोले का व्यास क्या होगा जिसका तल उस वृत्त के तल के बराबर है जिसका व्यास २·८ इञ्च है।

(१७) $७\frac{१}{२}$ सें० मी० व्यासार्द्ध वाले धातु के गोले को किसी उस बेलनाकार बर्तन में डाला गया जिसका कुछ भाग पानी से भरा हुआ है। यदि बेलनाकार बर्तन का व्यासार्द्ध १५ सें० मी० हो तथा गोला पानी में पूर्ण रूप से डूब गया हो तो इस प्रकार उठे हुए पानी के तल की ऊँचाई बताओ।

(१८) एक गेंद का मूल्य १ पैंस प्रति घन इञ्च की दर से उतना ही है जितना कि उसको ३ पैंस प्रति वर्ग इञ्च की दर से सुनहरा कराने में खर्च होता है। तो गेंद का व्यास बताओ।

(१९) सीसे की एक गोली को जिसका व्यासार्द्ध $१\frac{१}{२}$ इञ्च है पिघला कर ३ गोलियाँ ढाली गई हैं। दो गोलियों के व्यासार्द्ध क्रमशः $\frac{३}{४}$ इञ्च और १ इञ्च हैं। तो तीसरी गोली का व्यासार्द्ध ज्ञात करो।

बीसवाँ अध्याय

उपयोगी क्रियाएँ

खंड क—नंबर १—(१) ९४ के ऐसे दो भाग करो कि प्रथम का द्विगुणा तथा द्वितीय का त्रिगुणा मिलकर २७२ के बराबर हों।

क्रियाः—प्रथम भाग का द्विगुणा + द्वितीय भाग का त्रिगुणा = २७२ (१)

तथा प्रथम भाग + द्वितीय भाग = ९४

∴ प्रथम भाग का द्विगुणा + द्वितीय भाग का द्विगुणा = १८८ (२)

पहले समीकरण से द्वितीय का अन्तर करने पर

द्वितीय भाग = ८४ ⎫
∴ प्रथम भाग = १० ⎭ उत्तर

(२) ११० के ऐसे दो भाग करो कि पहले का ६ गुना दूसरे के ५ गुने के बराबर हो।

(३) ९०० रु० को तीन भागों में इस प्रकार विभाजित करो कि पहले भाग का $\frac{१}{२}$, दूसरे का $\frac{१}{३}$ तथा तीसरे का $\frac{१}{४}$ परस्पर बराबर हों।

नंबर २—(४) राधे तथा बलदेव ने समान धन से कोई व्यवसाय आरम्भ किया किन्तु १ वर्ष उपरान्त राधे को ९०० पौं० का लाभ हुआ तथा बलदेव ने अपनी पूँजी का $\frac{१}{१०}$ हानि दी, इस प्रकार राधे के पास इस समय बलदेव से दूना धन हो गया, तो बताओ कि पहले उन्होंने कितनी पूँजी लेकर व्यवसाय आरंभ किया था।

क्रिया:—राधे का वर्षोपरान्त धन = अपनी पूँजी + ९०० पौं०

बलदेव का वर्षोपरान्त धन = अपनी पूँजी का $(१ - \frac{१}{१०})$

= अपनी पूँजी का $\frac{९}{१०}$

किन्तु प्रश्न में दी हुई शर्त के अनुसार, बलदेव की पूँजी का $\frac{९}{१०} \times २$

= राधे की पूँजी + ९०० पौं०

किन्तु बलदेव और राधे की पूँजी आरम्भ में समान होने की दशा में,

∴ राधे की पूँजी का $\frac{९}{१०} \times २$ = राधे की पूँजी + ९०० पौं०

∴ राधे की पूँजी का $\frac{९}{५}$ = राधे की पूँजी + ९०० पौं०

अथवा पक्षान्तरानयन से,

राधे की पूँजी का $(\frac{९}{५} - १)$ = ९०० पौं०

∴ राधे की पूँजी का $\frac{४}{५}$ = ९०० पौं०

∴ राधे की पूँजी = ९०० का $\frac{५}{४}$ पौं०

= ११२५ पौं०

∴ उनमें से प्रत्येक के पास आरम्भ में १,१२५ पौं० थे। उत्तर

(५) क और ख ने समान धन से व्यापार आरम्भ किया, किन्तु १ वर्ष पश्चात् क को अपनी पूँजी का $\frac{१}{४}$ लाभ; और ख को ३५० रु० की हानि हुई। ख के पास इस समय क के धन का केवल $\frac{२}{५}$ रह गया, बताओ कि आरंभ में उनके पास क्या था।

नम्बर ३—(६) कोई मजदूर ३० दिन के लिए ८ आ० प्रति दिन पर लगाया गया और प्रत्येक अनुपस्थिति पर उसको २ आ० दंड देना

नियत हुआ, किन्तु अन्त में उसे १० ० ३ आ० मिले तो बताओ कि उसने कितने समय काम किया।

क्रिया:—यदि वह पूरे ३० दिन काम करता तो ८ आ० प्रति दिन के हिसाब से उसे १५ रु० मिलते।

∴ अनुपस्थिति के कारण उसे १५ रु० – १० रु० ३ आ० = ४ रु० १३ आ० की हानि हुई, किन्तु एक दिन की अनुपस्थिति से उसे अपनी मजदूरी तथा दंड की हानि होती है,

= (८ + ३) आ० = ११ आ०

किन्तु, कुल हानि = ४ रु० १३ आ० या, ७७ आ०

१ दिन की हानि = ११ आ०

∴ अनुपस्थिति का समय = $\frac{७७}{११}$ या ७ दिन

∴ वह समय जब वह काम पर रहा = २३ दिन उत्तर

(७) कोई व्यक्ति ४० दिन के लिए काम पर इस शर्त पर रखा गया कि वह प्रति दिन १ पौं० ५ शि० पाएगा, किन्तु प्रत्येक अनुपस्थिति पर उसे १० शि० जुर्माना देना होगा। अन्त में उसे २२ पौं० १० शि० प्राप्त हुए, तो बताओ वह कितने दिन अनुपस्थित रहा।

(८) कोई व्यक्ति २ रु० रोज पर नौकर रखा गया और प्रत्येक अनुपस्थिति के लिए उससे १ रु० २ आ० काटने की शर्त्त की गई। यदि उसने १६ दिन काम करके २५ रु० ४ आने प्राप्त किये हों, तो बताओ वह कितने समय के लिए रखा गया था।

(९) किसी जादूगर ने अपना तमाशा इस शर्त पर आरम्भ किया कि पकड़े जाने पर वह ३ रु० प्रति बार दंड देगा अन्यथा ५ रु० ले लेगा यदि उसने १५ बार खेल दिखा कर ४३ रु० प्राप्त किये तो बताओ वह कितनी बार नहीं पकड़ा गया।

नम्बर-(१०) किसी आदमी ने इस शर्त पर नौकरी की कि वर्षोपरान्त वह ६० रु० और एक कलाई की घड़ी ले लेगा, किन्तु ८ मास पश्चात् नौकरी छोड़ने पर उसे घड़ी और केवल ३० रु० प्राप्त हुए, तो घड़ी का मूल्य बताओ।

पहली विधि:—

क्रिया :—१२ मास का वेतन = ६० रु० + घड़ी

८ ,, = ३६ रु० + घड़ी

घटाने पर,

४ मास का वेतन = २४ रु०

१२ ,, ,, $= \frac{२४ \times १२}{४}$ रु० = ७२ रु०

किन्तु १२ मास का वेतन = ६० रु० + घड़ी

∴ घड़ी + ६० रु० = ७२ रु०

∴ घड़ी का मूल्य = (७२ − ६०) रु० = १२ रु० उत्तर

दूसरी विधि :—

८ मास = १ वर्ष का $\frac{२}{३}$

∴ उस व्यक्ति को घड़ी के मूल्य का $\frac{२}{३}$ तथा ६० रु० का $\frac{२}{३}$ प्राप्त होना चाहिये।

∴ उसे (घड़ी के मूल्य का $\frac{२}{३}$ + ४० रु०) मिलने चाहिये,

किन्तु जब उसे ३६ रु० मिलते हैं तो यह प्रत्यक्ष है कि वह घड़ी के मूल्य का $\frac{१}{३}$ अधिक तथा ४ रु० कम पाता है।

अतः घड़ी के मूल्य का $\frac{१}{३}$ = ४ रु०

∴ घड़ी का मूल्य = १२ रु० उत्तर

तीसरी विधि :—

माना कि घड़ी का मूल्य अ रु० है।

तब अ + ६० = १२ मास का वेतन

∴ $\frac{२}{३}$ अ + ४० = ८ मास का वेतन

किन्तु प्रश्न की शर्त के अनुसार,

अ + ३६ = ८ मास का वेतन

∴ अ + ३६ = $\frac{२}{३}$ अ + ४०

पक्षान्तरानयन से,

$अ - \frac{२}{३} अ = ४० - ३६$

$\therefore \frac{अ}{३} = ४$

$\therefore अ = १२$

∴ घड़ी का मूल्य = १२ रु० उत्तर

(११) मैंने एक व्यक्ति को ६ मास के लिए १२० रु० तथा १ शाल पर नौकर रखा किन्तु ५ मास के पश्चात् ही उसके नौकरी छोड़ने पर ४० रु० और शाल देकर बिदा कर दिया, तो शाल का मूल्य बताओ।

(१२) किसी व्यक्ति को एक डिप्टी साहब ने इस नियम पर रखा कि वह एक वर्ष उपरान्त १०० रु० तथा १ अँगूठी पायेगा, किन्तु उसके ८ मास पश्चात् ही नौकरी छोड़ने पर उन्होंने उसे ८० रु० और एक रेशमी चादर देकर बिदा किया। यदि उसने २ मास और काम किया होता तो उसे ७० रु० और अँगूठी भी मिल जाती। बताओ कि अँगूठी और चादर का मूल्य क्या है।

खंड ख—नम्बर ५—(१३) मुझे किसी स्थान पर नियत समय पर पहुँचना है। यदि मैं ४ मी० प्र० घं० की चाल से जाऊँ तो वहाँ ५ मि० देर से पहुँचूँगा, और यदि मैं ५ मी० प्र० घं० की चाल से जाऊँ तो १० मि० समय से पूर्व पहुँचूँगा, तो बताओ कि मुझे कितना मार्ग तै करना है।

क्रिया :—४ मी० यात्रा की जाती है १ घं० में,

∴ १ ,, $\frac{१}{४}$ घं० या १५ मि० में,

पुनः ५ मी० यात्रा होती है १ घं० में,

∴ १ मी० ,, $\frac{१}{५}$ घं० या १२ मि० में

∴ १ मी० यात्रा करने में समय का अन्तर,

= (१५ − १२) मि० या ३ मि०

किन्तु ४ तथा ५ मी० प्र० घं० चाल से जाने में

समय का यथार्थ अन्तर = (५ + १०) = १५ मि०

$\therefore$ यात्रा की अभीष्ट दूरी $= \dfrac{\text{समय का पूर्ण अन्तर}}{\text{१ मी० चलने में समय का अन्तर}}$

$\therefore$,, = १५ ÷ ३

= ५ मी० उत्तर

(१४) एक आदमी के पास फकीरों की किसी टोली को ४ पैसे प्रति व्यक्ति देकर ४ आ० बच रहे। तब उसे ज्ञात हुआ कि फकीरों को ६ पैसे की दर से दान करने के लिए उसके पास ३ आ० की कमी थी। तो बताओ कि कुल फकीर कितने थे, और उसे क्या व्यय करना पड़ा।

(१५) हरकेश यह जानकर कि ३ मी० प्र० घं० की चाल से वह अपने घर १० मि० देर से पहुँचेगा ४ मी० प्र० घं० चलकर नियत समय से ७½ मि० पहले पहुँच गया, तो बताओ उसने कितनी यात्रा की।

(१६) कुछ व्यक्तियों की भूख से रक्षा करने के लिए उन्हें २ रु० प्रति व्यक्ति देकर मेरे पास २० रु० शेष रहे, किन्तु जब मैंने उन्हें २ रु० ८ आ० की दर से देने का विचार किया तो देखा कि उनमें १० व्यक्ति रहे जाते थे। तो बताओ कि मुझे उनके देने के लिए कितने धन की आवश्यकता थी, तथा वह कितने मनुष्य थे।

संकेत :—दोनों दशाओं में प्राप्त धन का प्रति व्यक्ति अन्तर = ८ आ० तथा दोनों दशा में धनों में पूर्ण अन्तर

= २० रु० + १० व्यक्तियों का भाग २ रु० ८ आ० प्रति व्यक्ति की दर से

= (२० + २५) = ४५ रु०

नम्बर ६—(१७) किसी व्यक्ति ने ६०,००० रु० में ६०० पशु कुछ घोड़े तथा कुछ बैल क्रय किए। यदि घोड़े का मूल्य १२० रु० प्रति घोड़ा तथा बैल का ६० रु० प्रति बैल हो तो बताओ उसने कितने घोड़े लिए।

क्रिया :—यदि घोड़े न खरीद कर वह सब बैल ही खरीदता तो बैलों की कुल संख्या = ६०० तथा ६०० बैलों का मूल्य ६० रु० प्रति बैल

की दर से ५४,००० रु० अथवा जो कि वह इस समय व्यय करता है उससे ६००० रु० कम होता। किन्तु १ बैल के स्थान पर १ घोड़ा लेकर वह ३० रु० अधिक देता है।

∴ ६,००० रु० देकर वह २०० बैल के स्थान पर २०० घोड़े क्रय कर सकता है।

∴ घोड़ों की अभीष्ट संख्या = २०० उत्तर

(१८) ४५ रु० ११० अनाथों में बाँटे गये। यदि उनमें लड़के को ८ आ० तथा लड़की को ४ आ० दिये गये हों तो लड़कों व लड़कियों की संख्या बताओ।

(१९) एक व्यक्ति ने २५० रु० में ३० रेल के टिकट खरीदे। उनमें से कुछ १० रु० के पहले दर्जे के तथा कुछ ५ रु० के दूसरे दर्जे के टिकट हैं, तो बताओ उनमें दूसरे दर्जे के टिकट कितने हैं।

नम्बर ७—(२०) जबकि चावल का भाव १२ सेर प्रति रु० है, तो किसी कुटुम्ब का मासिक व्यय ८० रु० है और चावल १५ सेर प्रति रु० हो जाने पर उसका व्यय ७७ रु० होता है तो बताओ कि यदि और खर्च पूर्व प्रकार रहें और चावल १८ सेर प्रति रु० हो जाये तो उसका क्या खर्च होगा।

क्रिया :—

पहिली दशा में १ सेर चावल के दाम = $\frac{१}{१२}$ रु०

∴ दूसरी दशा में १ सेर चावल के दाम = $\frac{१}{१५}$ रु०

तथा इस प्रकार १ सेर के मूल्य पर अन्तर

$$= (\frac{१}{१२} - \frac{१}{१५}) = \frac{१}{६०} \text{ रु०}$$

किन्तु चावल के व्यवहार से व्यय में यथार्थ अन्तर

$$= (८० - ७७) \text{ रु०} = ३ \text{ रु०}$$

जब अन्तर $\frac{१}{६०}$ रु० है तो चावल की मात्रा = १ सेर

∴ १ ,, ,, = ६० सेर

∴ ३ ,, ,, = ६० × ३ = १८० सेर

किन्तु १२ से० की दर से १८० सेर चावल के दाम

= १५ रु०

∴ अन्य व्यय = (१८० – १५) रु० = ६५ रु०

किन्तु १८ सेर की दर से १८० सेर चावल के दाम = १० रु०

∴ १८ सेर चावल के भाव में कुटुम्ब का कुल व्यय

= (६५ + १०) = ७५ रु० उत्तर

(२१) १२ सेर प्रति रुपया भाव के गेहुओं में किसी कुटुम्ब का मासिक व्यय ५० रु० है, तथा १४ सेर प्रति रुपया भाव हो जाने पर जब कि और व्यय पूर्व प्रकार ही रहते हैं, वह ४८ रु० है तो बताओ कि १६ सेर के भाव में उनका क्या व्यय होगा।

(२२) चावल ४ रु० प्रति मन होने पर किसी परिवार का मासिक व्यय ५० रु० है, किन्तु २५% भाव चढ़ जाने से उनके व्यय में १०% वृद्धि हो जाती है जब कि और शेष व्यय पूर्व प्रकार रहते हैं। तो चावल के ऊपर व्यय छोड़कर और शेष व्यय बताओ।

(२३) किसी अस्पताल का वार्षिक व्यय कुछ स्थायी और कुछ रोगी-संख्या के ऊपर निर्भर है। यदि १०५ रोगियों पर ६५० पौं० तथा १२८ होने की दशा में ७४२ पौं० व्यय होता है तो बताओ कि ११५ रोगियों पर क्या व्यय होगा, तथा ७१० पौं० में कितने रोगी रखे जा सकेंगे?

खंड ग—नम्बर ८—(२४) ६६ वस्तुओं के बिल को पढ़ने में भूल से शि०, पौं० और पें० शि० पढ़े जाने पर उनका मूल्य यथार्थ मूल्य से ६८२ पौं० ८ शि० अधिक ज्ञात किया गया, तो बताओ कि यथार्थ मूल्य प्रति वस्तु क्या था।

क्रिया :—६६ वस्तुओं का अनुमानित मूल्य – ६६ वस्तुओं का यथार्थ मूल्य

= ६८२ पौं० ८ शि०

∴ १ वस्तु का अनुमानित मूल्य – १ वस्तु का यथार्थ मूल्य

= (६८२ पौं० ८ शि०) ÷ ६६

= ७ पौं० २ शि० २ पें०

माना कि यथार्थ मूल्य में क तथा ख शि० तथा पें० प्रकट करते हैं, तो यही क, ख अनुमानित मूल्य में पौं० तथा शि० को प्रकट करेंगे। अब हम इसी को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :—

पौं०	शि०	पें०	
क	ख	०	(१)
	क	ख	(२)
७	२	२	(३)

अब यह स्पष्ट है कि ३ व २ पंक्ति का योगफल १ के बराबर होगा,

अतः २ + १० = १२ पें ∴ ख = १०

अब १ व २ पंक्ति में ख के स्थान पर १० लिखने से,

पौं०	शि०	पें०
क	१०	०
	क	१०
७	२	२

अब दक्षिण ओर से क्योंकि १ हासिल प्राप्त होता है इसलिए,

१ + २ + क = १०

∴ क = १० − ३ = ७

∴ १ वस्तु का अभीष्ट यथार्थ मूल्य = ७ शि० १० पें० उत्तर

(२५) १½ दर्जन सीने की सिंगर मशीन का मूल्य आँकने में शि० को पौं० तथा पैंस को शि० तथा फार्दिंग को पें० पढ़ने की भूल के कारण अनुमानित मूल्य यथार्थ मूल्य से ३१४ पौं० १० शि० ७ पैं० २ फा० कम ज्ञात किया गया, तो बताओ कि यथार्थ मूल्य प्रति मशीन क्या था।

नम्बर ६—(२६) माफी का बोझा छोड़कर दो यात्रियों के पास ७ मन बोझ अधिक होने के कारण उनमें से एक को ३ रु० तथा दूसरे को ५ रु० चार्ज देना पड़ा। यदि यह सामान उनमें किसी एक का ही होता

तो उसे ११ रु० देने पड़ते, तो बताओ कि प्रत्येक यात्री को कितने बोझ की छूट मिलती है और उनमें प्रत्येक के पास कितना बोझा था।

क्रिया: (७ मन − २ × माफी बोझा) पर चार्ज $=$ (३ + ५) रु० $=$ ८ रु०

तथा (७ मन − १ माफी बोझा) पर चार्ज $=$ ११ रु०

अन्तर करने पर

१ माफी बोझे पर चार्ज $=$ (११ − ८) रु० $=$ ३ रु०

∴ यदि कुल बोझा १ व्यक्ति का होता तो उसे ११ रु० अधिक बोझ के तथा ३ रु० दूसरे माफी बोझे के जोकि दूसरे व्यक्ति का होने पर चार्ज से मुक्त होता, देने पड़ते।

अतः (११ + ३) रु० या १४ रु० ७ मन का चार्ज है।

∴ ३ रु० चार्ज है $\frac{३ \times ७}{१४}$ मन $=$ १$\frac{१}{२}$ मन का,

∴ माफी बोझा $=$ १$\frac{१}{२}$ मन

∴ पहले यात्री का बोझा $=$ (१$\frac{१}{२}$ + १$\frac{१}{२}$) $=$ ३ मन

दूसरे का बोझा $=$ (७ − ३) $=$ ४ मन उत्तर

(२७) दो एक ही स्थान को जाने वाले यात्रियों पर ६०० सेर बोझा अधिक होने के कारण उनमें से एक से १० रु० तथा दूसरे से २० चार्ज लिया गया। यदि यह सामान कुल १ आदमी का होता तो उसे ४० रु० देने होते। बताओ कि इस दशा में कितना बोझा चार्ज से मुक्त था, तथा उनमें से कितना-कितना दोनों के पास था।

(२८) दो यात्रियों से १६ मन बोझ अधिक होने से ६ रु० ८ आ० चार्ज लिया गया। यदि वह कुल बोझ एक का ही होता तो उसे ७ रु० ४ आ० देने होते। तो बताओ कि चार्ज के बिना कितना सामान ले जाया जा सकता है तथा चार्ज प्रति मन क्या है।

नंबर १०—(२९) ३ व्यक्ति भोजन के लिए एक साथ बैठे जिनमें से पहले के पास ५ रोटियाँ तथा दूसरे के पास ३ रोटियाँ थीं। तीसरे के पास रोटी न होने से उसने उन्हें १६ पैं० अपने भाग के दिए तो बताओ कि यह धन उन दोनों में किस प्रकार विभाजित किया जाय।

क्रिया :—प्रत्येक व्यक्ति $\frac{८}{३}$ रोटी खाता है।

∴ पहले ने (५ − $\frac{८}{३}$) या $\frac{७}{३}$ रोटी तीसरे को दी,

तथा दूसरे ने (३ − $\frac{८}{३}$) या $\frac{१}{३}$ रोटी तीसरे को दी,

∴ १६ पैं, $\frac{७}{३}$: $\frac{१}{३}$ = ७ : १ के अनुपात में विभाजित होने चाहिये।

∴ पहले का भाग १६ पैं० का $\frac{७}{८}$ = १४ पैं०।

दूसरे का भाग = १६ पैं० का $\frac{१}{८}$ = २ पैं०। उत्तर

(३०) तीन यात्री जिनमें पहले के पास ६ और दूसरे के पास ७ रोटियाँ, तथा तीसरे के पास नहीं है भोजन के लिए बैठते हैं और यह तीसरा व्यक्ति उसके पश्चात् इन्हें ८ आ० ८ पा० देता है, तो बताओ कि यह धन दोनों में किस प्रकार बाँटा जाय।

नंबर ११—(३१) किसी आदमी के पास बिक्री के कुछ सेब हैं। वह उन कुल का आधा तथा ६ अधिक क को, शेष का $\frac{१}{३}$ व ४ अधिक ख को और शेष का $\frac{१}{४}$ व ९ अधिक ग को बेचता है और इस प्रकार सब बेच डालता है। तो बताओ पहले उसके पास कुल कितने सेब थे।

क्रिया :—जब उसने अपने सेबों का $\frac{१}{४}$ − ग को दिया तो उसके पास ९ शेष थे,

∴ उसके पास, (१ − $\frac{१}{४}$) या $\frac{३}{४}$ सेब थे जब कि ग खरीदने आया

∴ कुल सेब की संख्या का $\frac{३}{४}$ = ९

$$∴ \text{ग के आने से पहले सेबों की संख्या} = \frac{९ \times ४}{३}$$

$$= १२$$

∴ उसके पास (१२ + ४) या १६ सेब थे जब कि उसने ४, ख को दिये। किन्तु यह वह संख्या है जो कि कुल संख्या का $\frac{१}{३}$, ख को देने के पश्चात् उसके पास थी।

∴ उसके पास (१ − $\frac{१}{३}$) या $\frac{२}{३}$ कुल संख्या का भाग शेष था जब कि ख उसके पास आया।

∴ कुल संख्या का $\frac{२}{३}$ = १६

∴ ख के आने से पहले उसके पास सेबों की संख्या = $\frac{१६ \times ३}{२}$

= २४

∴ क को ६ सेब देने से पहले उसके पास (२४ + ६) या ३० सेब थे,

किन्तु यह वह संख्या है जोकि कुल का $\frac{१}{२}$, क को देने से पहले उसके पास थी।

∴ उसके पास कुल का (१ − $\frac{१}{२}$) या $\frac{१}{२}$, क के आने से पूर्व था।

∴ कुल संख्या का $\frac{१}{२}$ = ३०

∴ क के पूर्व सेबों की कुल संख्या = ३० × २ = ६०

∴ उसके पास पहले ६० सेब थे। उत्तर

(३२) किसी व्यक्ति के पास बिक्री के कुछ आम हैं जिनमें से वह $\frac{१}{२}$ तथा १ अधिक क को, शेष का $\frac{१}{३}$ व २ अधिक ख को, तथा शेष का $\frac{१}{४}$ व ३ अधिक ग को, और शेष का $\frac{१}{५}$ व ४ अधिक घ को देता है जिसके पश्चात् उसके पास ३२ आम बच रहते हैं, तो बताओ उसके पास पहले कितने आम थे।

(३३) किसी मनुष्य के पास कुछ पौं० हैं जिनमें कुल का $\frac{१}{१०}$ तथा ५ अधिक वह टौम को, कुल का $\frac{१}{४}$ व १० अधिक डिक को देता है और उसके पास २४ पौं० फिर भी बच रहते हैं, तो बताओ उसका कुल धन आरम्भ में क्या था।

नंबर २—(३४) एक खरगोश किसी शिकारी कुत्ते से ८० छलाँग आगे है, आदौड़ में वह यदि ४ छलांग भरता है तो उसी समय में कुत्ता

३ किन्तु कुत्ते की १ छलांग खरगोश की २ छलांग के बराबर है। बताओ कि कुत्ता उसे कितनी छलांग में पकड़ लेगा।

क्रिया :—माना कि खरगोश की १ छलांग = १ गज

तो कुत्ते की १ छलांग = २ गज

∴ खरगोश की ८० छलांग = ८० गज

∴ कुत्ते को खरगोश की अपेक्षा ८० गज अधिक दौड़ना है।

किन्तु कुत्ता ३ छलांग भरता है, जबकि खरगोश ४

∴ जब कुत्ता १ छलांग भरता है तो खरगोश ४/३ छलांग

∴ कुत्ता जब २ गज दौड़ता है तो खरगोश ४/३ गज

∴ कुत्ता खरगोश की अपेक्षा १ छलांग में (२ – ४/३) या २/३ गज अधिक जाता है।

∴ कुत्ता ८० गज, $\frac{८० \times ३}{२}$ = या १२० छलांग में उसे पकड़ लेगा।

उत्तर

(३५) एक कुत्ता खरगोश को अपने से ६० छलांग आगे देखकर खरगोश की ५ छलांग के साथ ४ छलांग मार कर पीछा करता है, किन्तु वह अपनी ३ में ही इतना मार्ग दौड़ लेता है जितना कि खरगोश ४ में। तो बताओ कि खरगोश के पकड़े जाने तक उन दोनों ने कितनी छलांगें भरीं।

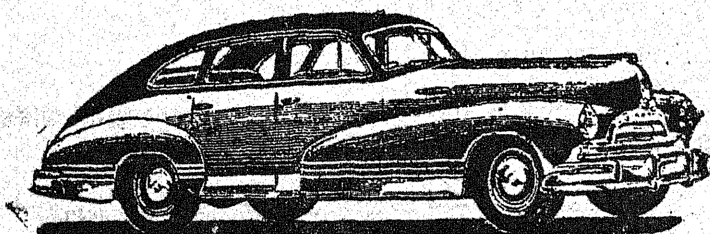
(३६) आक्सफोर्ड और केम्ब्रिज की नाव की दौड़ में पहले की नाव दूसरे की नाव से ३० हाथ आगे थी किन्तु पहले लोग दूसरे के प्रति ३ हाथ के साथ ४ हाथ चलाते थे जबकि दूसरे के केवल २ पहलों के ३ समान थे। बताओ कि दूसरों को पहलों से आगे बढ़ने के लिए कितने हाथ मारने चाहिए।

इक्कीसवाँ अध्याय

लेखा-चित्र

उनका पढ़ना और खींचना

मोटर के एक चित्र से उसके विषय में अनेक बातें जानी जा सकती हैं। सम्भवतः उतनी बातें उसके विषय में शब्दों से नहीं प्रत्यक्ष होतीं। चित्र आँखों

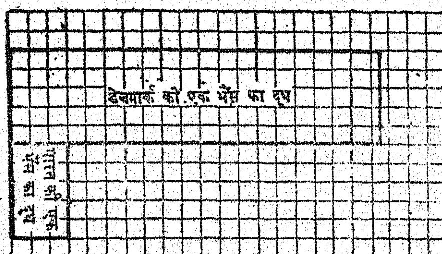


के सामने होता है और उसके समझने में आँखें बहुत सहायता देती हैं। इसके अतिरिक्त हाथ से भी बड़ी सहायता मिलती है। हाथ से बनाई हुई वस्तु को हम कभी नहीं भूलते।

ग्राफ या लेखा-चित्र भी एक प्रकार का चित्र है जो भूगोल, गणित, विज्ञान, अर्थशास्त्र आदि की जानकारी हमारी आँखों के सामने रखता है। इसकी सहायता से ज्ञान शीघ्र और सरलता से प्राप्त होता है और यदि लेखा-चित्र हाथ से खींचा जाय तो बहुत दिनों तक स्मरण भी रहता है।

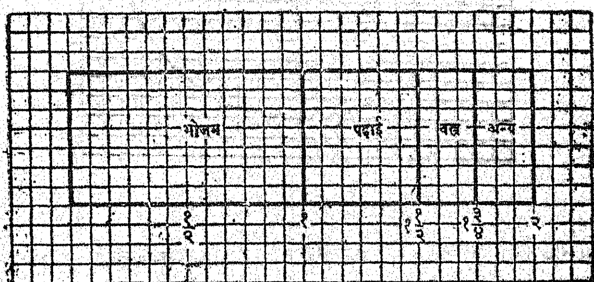
उदाहरण १—चित्र में भारत की एक भैंस के दूध की तुलना डेनमार्क की एक भैंस के दूध से की गई है। इस चित्र को ध्यानपूर्वक देखो और बताओ कि यह क्या सूचित करता है।

चित्र से स्पष्ट होता है कि डेनमार्क में एक भैंस भारत की एक भैंस की अपेक्षा ६ गुना दूध देती है।



टिप्पणी:—इस लेखा-चित्र को कालमग्राफ या स्तम्भग्राफ कहते हैं।

(२) चित्र में यह दिखाया गया है कि एक मनुष्य अपनी आय का कितना भाग भोजन पर व्यय करता है, कितना बच्चों की पढ़ाई पर, कितना वस्त्रों प



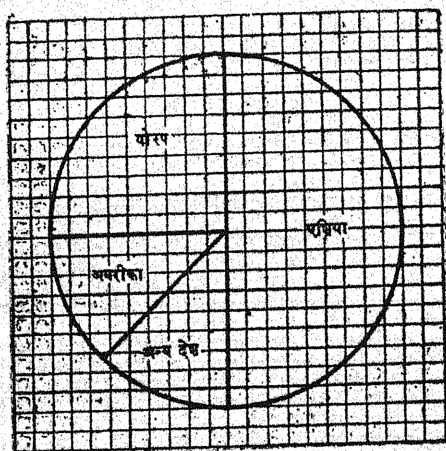
और कितना अन्य कामों पर। बताओ कि वह इनमें से प्रत्येक पर कितनी-कितनी आय व्यय करता है।

चित्र से तुरन्त स्पष्ट हो जाता है कि वह मनुष्य अपनी आय का $\frac{1}{2}$ भोजन पर व्यय करता है, $\frac{1}{4}$ बच्चों की पढ़ाई पर, $\frac{1}{8}$ वस्त्रों पर तथा $\frac{1}{8}$ भाग अन्य कामों पर।

टिप्पणी :—इस लेखा-चित्र को आयत ग्राफ कहते हैं ।

स्तम्भ और आयत ग्राफ खानेदार कागज पर सरलता से बनाये जा सकते हैं ।

(३) इस चित्र में संसार के देशों की जनसंख्या एक वृत के भागों से



प्रकट की गई है । बताओ कि जनसंख्या का कितना-कितना भाग कहाँ-कहाँ रहता है ।

चित्र से स्पष्ट है कि संसार की जनसंख्या का $\frac{१}{२}$ भाग एशिया में रहता है, $\frac{१}{४}$ भाग योरुप में, $\frac{१}{८}$ भाग अमरीका में तथा शेष $\frac{१}{८}$ भाग अन्य देशों में ।

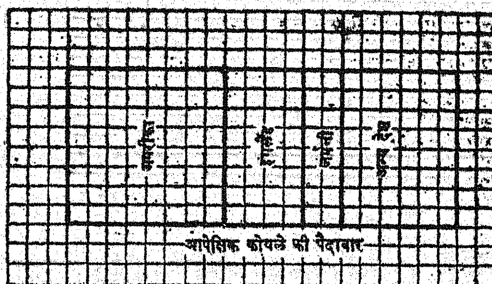
टिप्पणी :—इस लेखा चित्र को वृत्त ग्राफ कहते हैं ।

इस प्रकार के चित्र से हम दो या दो से अधिक वस्तुओं का आपेक्षिक सम्बन्ध सरलतापूर्वक दिखला सकते हैं ।

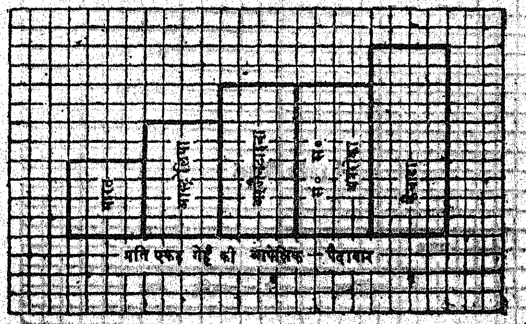
प्रश्नावली २४

नीचे दिये हुए चित्रों के अर्थ पढ़ो :—

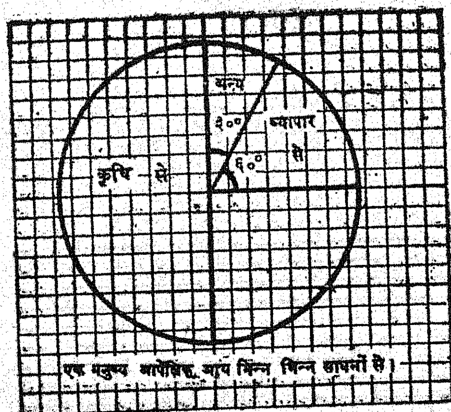
(१)



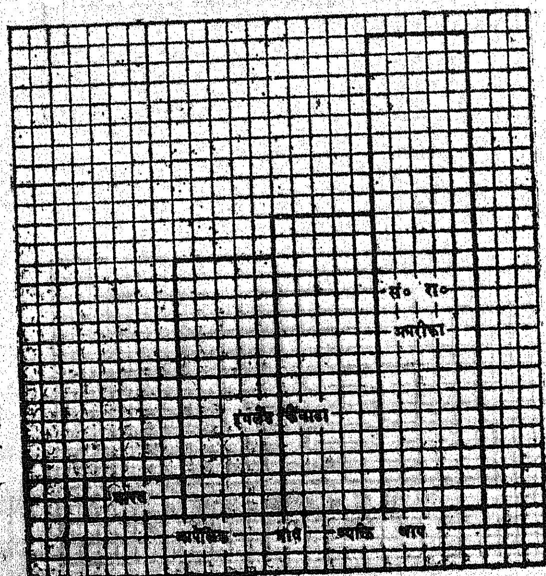
(२)



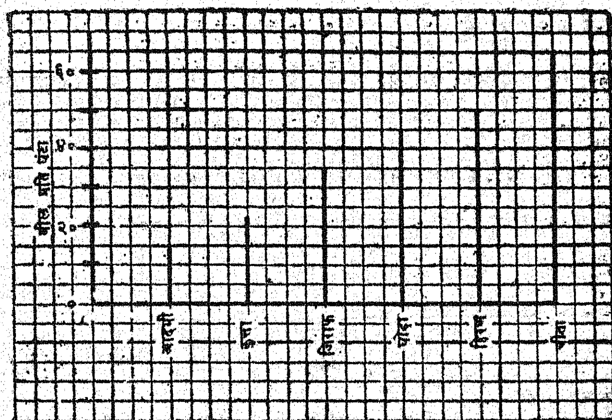
(३)



(४)



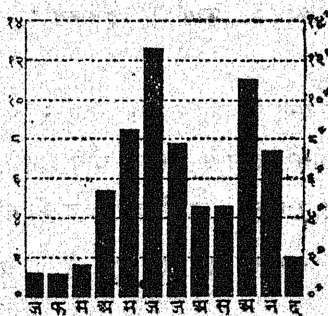
(५)



ऊपर का ग्राफ आदमी और कुछ पशुओं के दौड़ने की चालें मीलों में प्रकट करता है।

(अ) यह बताओ कि सबसे शीघ्र कौन दौड़ता है। उसकी चाल प्रति घंटा क्या है?

(ब) सबसे कम दौड़ने वाला पशु कौन है? उसकी चाल प्रति घंटा क्या है?



यह ग्राफ त्रिवन्द्रम् नगर की बारह महीनों की वर्षा दिखलाता है। (वर्षा इंचों में दी हुई है)

(अ) चित्र देखकर बताओ कि मई और अगस्त में कितना-कितना पानी बरसा।

(ब) सबसे अधिक और सबसे कम पानी किन-किन महीनों में बरसा ?

नीचे के प्रश्नों को ग्राफ (लेखा-चित्र) द्वारा प्रदर्शित करो :—

(७) संसार के कुछ देशवासियों का माध्य

देश	भारत	स्विटजर-लैंड	जर्मनी	इङ्गलैंड	न्यूजीलैंड
आयु का माध्य वर्षों में	२७	५६	५८	६१	६४

(८) एक नगर में १/२ हिन्दू, १/४ मुसलमान, १/८ ईसाई तथा शेष पारसी हैं।

(९) भारत में ७५ प्रतिशत खेती, १० प्रतिशत उद्योग-धंधे, ५ प्रतिशत नौकरी तथा १० प्रतिशत शेष काम करते हैं।

(१०) संसार में लोहे की आपेक्षिक उपज निम्न प्रकार है :—

संयुक्त राज्य अमरीका २/५, फ्रांस १/५, इङ्गलैंड ३/२०, स्वेडन १/२०, अन्य देश १/५।

(११) एक बाढ़ में गंगा के पानी ने एक दिन २ एकड़ जमीन ढक ली, दूसरे दिन ३ एकड़, तीसरे दिन ५ एकड़, चौथे दिन ४ एकड़, पाँचवें दिन २ एकड़ और छठे दिन १ एकड़। स्तम्भों द्वारा बाढ़ की गति दिखलाओ।

(१२) बनारस की बरसात नीचे दी हुई है। वर्षा को स्तम्भों द्वारा दिखलाओ।

महीना	ज	फ	म	अ	म	ज	ज	अ	स	अ	न	द
बरसात इञ्चों में	१	१	१	—	—	५	१३	१०	८	२	०	०

(१) इस ग्राफ के आधार पर बताओ कि बनारस में पानी कितना और कब बरसता है।

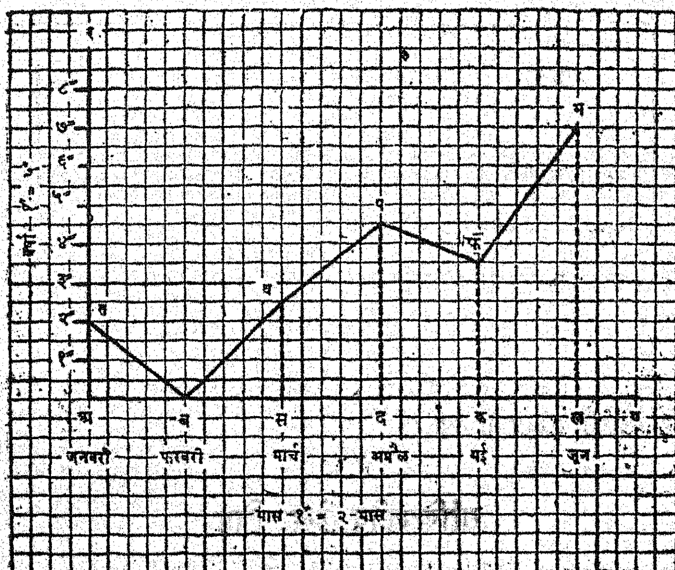
(२) इनके सिरों के मिलाने से वक्र रेखा मिलेगी, वह बरसात के समझने में कुछ सहायता करेगा या नहीं ?

सांख्यिकीय लेखा चित्र

हमने ग्राफ का कुछ अभ्यास ऊपर किया है। इस प्रकार के ग्राफ से हमें केवल आपेक्षिक ज्ञान ही हो सकता है। इनसे हम नई बातें नहीं ज्ञात कर सकते। ग्राफ को अधिक उपयोगी किस प्रकार बनाया जा सकता है यह नीचे दिये हुये उदाहरणों से स्पष्ट होगा।

उदाहरण १—नीचे की सारणी में एक नगर की जनवरी से जून तक ६ मास की वर्षा इंचों में दी हुई है। इसका ग्राफ बनाओ।

मास	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून
वर्षा	२″	०″	·३″	५″	४″	८″



क्रिया :—अ य एक रेखा खींची। इस पर १" = २ मास माना। यदि अ जनवरी सूचित करता है तो ब, स, द, क, ख क्रमशः फरवरी, मार्च, अप्रैल, मई, जून सूचित करते हैं। हमने अ य पर लम्बवत् एक रेखा, अ र खींची और उस पर १" से ५" वर्षा सूचित की। अतः अ त जनवरी की २" वर्षा, ब फरवरी की ०" वर्षा, स थ मार्च की ३" वर्षा, प अप्रैल की ५" वर्षा, क फ मई की ४" वर्षा, ख भ जून की ८" वर्षा सूचित करती हैं। इससे स्पष्ट है कि हमें वर्षा बतलाने वाली रेखाओं की कोई आवश्यकता नहीं। हमें केवल उनके सिरों के बिन्दु त, ब, थ, प, फ, भ चाहिये। अतः अ य, अ र दो रेखाएँ लम्बवत् लेकर अ य की ओर मास और अ र की ओर वर्षा इंचों में मानकर त, ब, थ, प, फ, भ बिन्दुओं को ज्ञात कर स्थापित कर लेना चाहिए और इनको क्रमशः सीधी रेखाओं द्वारा मिला देना चाहिये। इन टूटी हुई रेखाओं से बना हुआ चित्र ही अभीष्ट ग्राफ है।

टिप्पणी :—इस प्रकार के ग्राफ को **सांख्यिकीय ग्राफ** कहते हैं। यह भिन्न-भिन्न प्रकार के होते हैं।

इनमें हम दो रेखाएँ लम्बवत् अ य और अ र लेते हैं। **इन्हें अक्ष कहते हैं।** अ य को य-अक्ष तथा अ र को र-अक्ष कहते हैं। स्वाधीन राशि के मान य-अक्ष पर तथा आधीन राशि के मान र-अक्ष-पर दिखलाए जाते हैं। ऊपर के उदाहरण में मास स्वाधीन राशि है तथा वर्षा आधीन राशि है।

ग्राफ सम्बन्धी कुछ स्मरणीय बातें

(१) स्वाधीन राशि य-अक्ष पर तथा आधीन राशि र-अक्ष पर दिखाओ।

(२) प्रत्येक अक्ष पर लिखो कि वह क्या राशि सूचित करती है। उनकी मापनी भी उनके नीचे लिखो।

(३) कागज के परिमाण के अनुसार बड़ी से बड़ी सुविधाजनक मापनी मानो। मापनी ऐसी होनी चाहिये कि जिन बिन्दुओं को तुम लगाना चाहते हो वह सुगमता से लग जायँ। दोनों अक्ष के लिए एक ही मापनी आवश्यक नहीं है।

(४) अ य और अ र के प्रतिच्छेद बिन्दु अ को ऐसा मानना चाहिये कि वह कम से कम दिखाई जाने वाली राशियों से कम किन्तु सुविधाजनक राशि विदित करे।

(५) वर्गाङ्कित कागज ग्राफ खींचने के लिये प्रयोग करो।

(६) ग्राफ स्वच्छ हो और बारीक पैंसिल से खींचा जावे।

प्रश्नावली ३५

खंड क नम्बर १—(१) एक नगर की जनसंख्या का जिसके आँकड़े नीचे दिये हुए हैं, ग्राफ बनाओ :—

वर्ष	१९११	१९२१	१९३१	१९४१	१९५१
जनसंख्या (लाखों में)	३·५	३·८	३·२	३·७	४·१

१६१६ में जनसंख्या का अनुमान लगाओ। ३.६ लाख जन-संख्या कब थी ?

(२) एक मनुष्य ६ घण्टे तक चलता रहा। प्रत्येक घण्टे में वह कितना चला यह नीचे दिया है। उसकी चाल का ग्राफ खींचो।

घण्टा	१	२	४	५	७	८
मील	३	४	५	४	३	$२\frac{१}{२}$

अनुमान से बताओ कि वह तीसरे और छठे घण्टे में कितना-कितना चला होगा।

(३) एक मनुष्य की एक सप्ताह की आय रुपयों में दी हुई है। उसका ग्राफ बनाओ :—

दिन	सोमवार	मंगल-वार	बुधवार	बृह०	शुक्रवार	शनि-वार	रविवार
आय	१७५	१६७	१६५	१४०	१५५	१८२	१२०

(४) शिमला का तापमान नीचे दिया है। इसकी सहायता से तापमान का ग्राफ खींचो।

मास	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून
तापमान	४०°	४२°	४८°	५६°	६४°	६७°

माह	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसम्बर
तापमान	६५°	६२°	६०°	५७°	४६°	४४°

अनुमान से बताओ कि १५ अप्रैल और १५ नवम्बर को कितना-कितना तापमान रहा होगा।

(५) भिन्न-भिन्न ऊँचाई के मनुष्यों के भारों का माध्य पौंडों में नीचे सारणी में दिया हुआ है। ग्राफ बनाओ ५' ४" और ५' ८" ऊँचाई वाले मनुष्यों के भार बताओ :—

ऊँचाई	५' ०"	५' ३"	५' ६"	५' ९"	६' ०"
भार	१२२	१३१	१३७·५	१५६·५	१७३

(६) एक बढ़ते हुए पौधे की लम्बाई सप्ताह के पहले दिन प्रातःकाल नापी गई और वह निम्न प्रकार है :—

तिथि	२ जून	९ जून	१६ जून	३० जून
लम्बाई	३"	४"	५·५"	८"

पौधे की लम्बाई का ग्राफ खींचो और ज्ञात करो कि २३ जून को पौधे लम्बाई क्या रही होगी।

(७) एक वस्तु ऊपर से हवाई जहाज से छोड़ी गई। नीचे की सारणी में यह दिखाया गया है कि वह कितने समय में कितने फुट गिरी है। इसका ग्राफ खींचो और बताओ कि २$\frac{1}{8}$ सैकिंड में वह कितने फुट गिरी होगी।

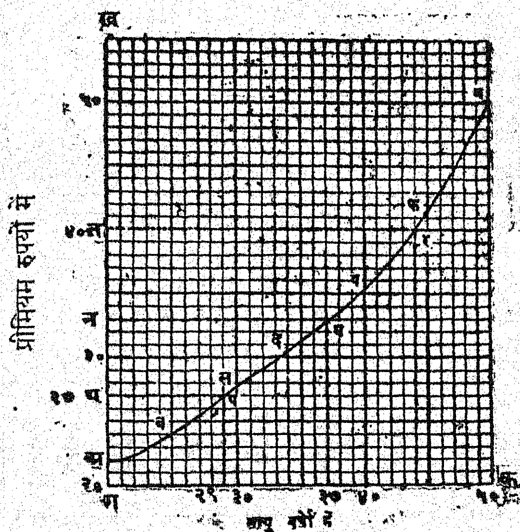
समय सैकेंड में	$\frac{1}{2}$	१	१$\frac{1}{2}$	२	२$\frac{1}{2}$	३
फुट	४	१६	३६	६४	१००	४४

नम्बर २—(८) निम्न सारणी से मृत्यु पर मिलने वाले १००० रु० का वार्षिक प्रीमियम प्रकट है।

आयु वर्ष में	२०	२५	३०	३५	४०	४५	५०
प्रीमियम रुपयों में	२२	२४·४	२७·८	३१·३	३५·८	४१·४	५०·६

लेखा-चित्र प्रस्तुत कर २६ तथा ४४ वर्ष की आयु वाले २ व्यक्तियों का प्रीमियम बताओ, और यह भी बताओ कि जिसका प्रीमियम ३३ रु० है उसकी आयु क्या है।

क्रिया :—मापनी—ग क पर १ भाग पर १ वर्ष प्रकट करो, और ग ख पर इसी प्रकार रु० दिखलाओ, माना कि मूल ग २० वर्ष तथा २० रु० प्रकट करता है।



बिन्दु अ ब स द य फ ग को अंकित कर मिलाने से, हमको प्राप्त हुई वक्र रेखा ही अभीष्ट लेखा-चित्र है।

२६ तथा ४४ की आयु पर दिए जाने वाले प्रीमियम परस्पर सम्बन्धित कोटि अंक ग थ और ग ल द्वारा प्रकट हैं जो कि नापने से २७ रु० और ४० रु० प्रकट करती हैं।

∴ २६ और ४४ की आयु पर दिये जाने वाले प्रीमियम क्रमशः २७ रु० और ४० रु० हैं। साथ ही ३३ रु० देने की आयु भुजांक म न द्वारा प्रकट है और ३७ वर्ष आयु बतलाती है। उत्तर

सूचना :—वक्र रेखा से यह प्रकट है कि आयु की वृद्धि के साथ प्रीमियम में शीघ्रता से वृद्धि होती है।

(६) वर्षों में किसी देश की जनसंख्या (करोड़ में) निम्नलिखित आँकड़ों से प्रकट है :—

वर्ष	१८००	१८१०	१८२०	१८३०	१८४०	१८५०	१८६०	१८७०	१८८०
जन-संख्या	८·९	१०·२	१२·०	१३·९	१५·९	१७·९	२०·०	२२·७	२६·०

इसका लेखा-चित्र प्रस्तुत करो और १८३८ में जनसंख्या कितनी थी तथा किस वर्ष में २४ करोड़ थी यह बतलाओ।

(१०) यदि मास के प्रथम दिवस पर सूर्यास्त के समय (घन्टा व मिनट में) निम्न प्रकार हैं, तो इस सूचना के अनुसार लेखा-चित्र प्रस्तुत करो और बताओ कि सूर्यास्त सब से शीघ्र और सबसे विलम्ब से कब होता है।

मास	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसम्बर
समय	१५·५८	१६·४६	१७·३७	१८·३०	१९·२०	२०·०४	२०·१८	१९·४८	१८·४७	१७·३६	१६·३४	१५·५४

(११) किसी दिन प्रत्येक दो घन्टे पर लिया हुआ ताप निम्न सारिणी से प्रकट है :—

समय	अर्द्धरात्रि	२ बजे	४ बजे	६ बजे	८ बजे	१० बजे	मध्याह्न	२ बजे	४ बजे	६ बजे	८ बजे	१० बजे	अर्द्धरात्रि
ताप	४१°	४०·८°	४०·७°	३९·५°	४०·८°	४४·५°	४८°	५१·२°	५३·६°	४९·५°	४९·३°	४९·७°	४७·४°

समस्त दिन के ताप का उतार चढ़ाव ज्ञात करने के लिये लेखा चित्र प्रस्तुत करो और बतलाओ कि ३ बजे सायंकाल तापमान क्या था।

(१२) चक्रवृद्धि ब्याज की सारणी से प्राप्त निम्न सूचना ४% पर १ पौं० का मिश्रधन विभिन्न समय में प्रकट करती है :—

वर्ष की संख्या	१	६	११	१६	२१	२६	३१	३६
मिश्रधन	१·०४	१·२७	१· ४	१·८७	२·२८	२·७७	३·३७	४·१

उक्त का लेखा-चित्र प्रस्तुत करो, और उसके द्वारा १५ वर्ष में १०० पौं० का।मिश्रधन ज्ञात करो, तथा बतलाओ कि कितने समय में १०० पौं० के २४७ पौं० हो जावेंगे।

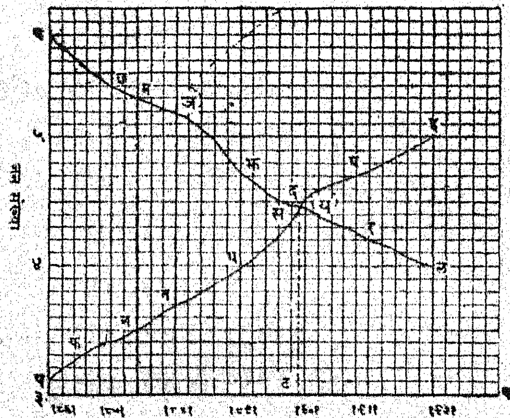
संकेत :—लेखाचित्र से १५ वर्ष में १ पौं० का मिश्रधन ज्ञात करो। अभीष्ट धन १ पौं० के मिश्रधन का १०० गुना होगा।

(१३) १०,००० बालकों में से ६ वर्ष की आयु व्यतीत कर लेने पर ४६० दश वर्ष की आयु में मर गये; २७२, १४ वर्ष आय में; ६५०, २२ वर्ष में; ६१७, २५ वर्ष में; ७५७ ३५ वर्ष में; ६५०, ४५ वर्ष में; १३६६, ५५ वर्ष में; २१४१, ६५ वर्ष में; २५७८, ७४ वर्ष में; ११३८, ८५ वर्ष में; और ८३, ६५ वर्ष की आयु में मृत हो गए। उक्त आँकड़ों से लेखाचित्र प्रस्तुत कर ज्ञात करो कि इन १०,००० बालकों में से १८, ४०, व ८० वर्ष की आयु पर कितने मर गए।

खंड ख—नंबर ३ (१४) दिये हुए वर्षों में अ तथा ब दो देशों की जनसंख्या (कोटी संख्या में) निम्न प्रकार दी हुई है :—

वर्ष	१८६१	१८७१	१८८१	१८९१	१९०१	१९११	१९२१
अ	३·१	३·४	३·७	४·०	४·४७	४·७	५·०
ब	५·८	५·४	५·२	४·७	४.४५	४·२	४·०

उक्त आँकड़ों से लेखा-चित्र प्रस्तुत करो और ज्ञात करो कि किन वर्षों में जनसंख्या लगभग समान थी, तथा किस वर्ष अ की जनसंख्या ब से १·८ कोटि अधिक थी।



क्रिया :—

मापनी:—उ क पर १ छोटे भाग पर २ वर्ष तथा उ ख पर १० छोटे भाग पर १ कोटि जनसंख्या प्रकट करो।

तथा, मूल के निर्देशांक १८६१ वर्ष तथा ३ कोटि जनसंख्या मानो। चित्र में

दिये हुए के अनुसार बिन्दु अंकित कर मिलाने से रेखा प फ त थ द ध ह प्राप्त होती है जो कि अ का लेखा चित्र है।

इसी प्रकार से हमको रेखा च छ ज झ य र ल प्राप्त होती है जो कि ब का लेखाचित्र है। यह दोनों स बिन्दु पर परस्पर काटती हैं, जिससे प्रकट है कि ट द्वारा प्रकट वर्ष में दोनों देशों की जनसंख्या समान थी।

(१) ∴ सन् १९०० में दोनों देशों की संख्या समान थी। उत्तर

(२) यह ज्ञात करने के लिये कि अ की जनसंख्या ब की जनसंख्या के किस वर्ष में १.८ कोटि अधिक थी, उ ख अक्ष के समांतर पटरी इस प्रकार सरकाओ कि दोनों लेखाचित्रों के बीच का अन्तर १८ छोटे भागों के बराबर हो। ऐसा सन् १८७५ में होता है, क्योंकि तब म और न के कोटि अंकों का अन्तर = मन = १८ भाग = १·८ कोटि

∴ सन् १८७५ में अ की जनसंख्या ब की जनसंख्या से १·८ कोटि अधिक थी।

(१५) विभिन्न वर्षों के आरम्भ में भारत की यवन तथा क्रिस्तान जनसंख्या (कोटि में) निम्न आँकड़ों से प्रगट है:—

वर्ष	१८२१	१८३१	१८४१	१८५१	१८६१	१८७१	१८८१
ईसाई	२·१	२·४	२·६	२·९	३·१	३·४	३·७
मुसलमान	६·८	७·८	८·२	६·६	५·८	५·४	५·२

एक मापनी पर हो उक्त सूचना से दो लेखा-चित्र प्रस्तुत करो और बतलाओ किस वर्ष में यवन क्रिस्तान से लगभग दुगुने थे, तथा यवनों की संख्या ७·५ कोटि किस वर्ष थी ।

(१६) हमारे देश में चावल, गेहूँ और चने के उत्पादन का अनुपात इस प्रकार था । एक ही चित्र में ग्राफ खींच कर उत्पादन गति की तुलना करो :—

वर्ष	१९३९ –४०	१९४० –४१	१९४१ –४२	१९४२ –४३	१९४३ –४४	१९४४ –४५
चावल	९८	८८	९२	९९	१०२	९८
गेहूँ	१०४	९८	९१	९९	७७	७७
चना	९४	९५	८६	१११	१४३	१४५

(१७) १९०५ से १९१४ तक डिबैंचर का मूल्य पौं० में निम्न प्रकार था :—

वर्ष	१९०५	१९०६	१९०७	१९०८	१९०९	१९१०	१९११	१९१२	१९१३	१९१४
अधिकाधिक मूल्य	१११ १/२	१०३ १/४	९८ १/२	९८	९३ ७/२	९२ ७/१६	९०	९१ १/४	८७ १/१६	८८ १/१६
न्यूनतर मूल्य	९७ ३/४	९६ ३/४	९१	९२ १/२	८६ ७/२	८५	८७ १/२	८५ १/१६	८० ३/४	८३ १/४

उक्त आँकड़ों से मूल्य में चढ़ाव-उतार दिखाने के लिये एक लेखा-चित्र प्रस्तुत करो ।

(८) सन् १९१०-१९१९ तक के भारत से जाने तथा यहाँ आने वाले माल का मूल्य (करोड़ रुपयों में) निम्न आँकड़ों से प्रकट है :—

वर्ष	१९१०	१९११	१९१२	१९१३	१९१४	१९१५	१९१६	१९१७	१९१८	१९१९
आने वाला माल	९६	१०५	१०[illegible]	१११	१३१	१४४	१४४	१६२	१७०	१५२
जाने वाला माल	११७	१२२	१३६	१३९	१६८	१६४	१७७	१८१	१८३	१५९

उक्त सूचना से एक लेखा-चित्र प्रस्तुत करो जिसके द्वारा यह विषय प्रकट किया जा सके।

दोहराने के लिए पर्चे

१

सरल करो :—

(१) (क) $\frac{७\frac{३}{१४} - ५\frac{२}{२१}}{८\frac{६}{७} - ७\frac{५}{६}} + \frac{१}{१ + \frac{१}{१४ + \frac{१}{३}}}$

मान ज्ञात करो :—

(ख) $\frac{१.९१ \times .२०९}{.००२५३} - \frac{२.०३ \times ३६}{[illegible]४८}$

(२) (क) ३६ मन के [illegible] कोश में [illegible] सेर १० छटाँक कितनी बार सम्मिलित है?

(ख) ४ रु० ७ आ० ४ पा० को ६ रु० ८ आ० की दशमलव भिन्न में २ शुद्ध दशमलव स्थान तक प्रकट करो।

(३) (क) किसी धन का $\frac{१}{२}$ इस प्रकार लगाया हुआ है कि उससे ५% आय होती है, तथा उसी का $\frac{१}{३}$ इस प्रकार लगा है कि उससे ६% आय होती है, और शेष से ८%। तो बताओ कि कुल धन पर ब्याज की दर का माध्य क्या है।

(ख) किसी व्यक्ति को अपने धन की १०% हानि होने के पश्चात् शेष धन के १२% की हानि और हो गई और तब उसके पास १९८० रु० शेष रहे, तो कुल धन क्या था?

(४) (क) ६ आ० प्रति सेर का तम्बाकू १० आ० सेर के भाव वाले में किस अनुपात में मिलाया जाय कि उसे १० आने ६ पाई प्रति सेर बेचने से ४०% लाभ हो।

(ख) ४$\frac{१}{२}$% ब्याज पर कितना धन १८३७ रु० ८ आ० उतने ही समय में हो जायगा, जितने में कि ४$\frac{१}{२}$% दर पर १०३३ रु० ५ आ० ४ पा० का कुल धन ११०३ रु० १ आ० ४ पा० हो जाता है।

(५) कोई धन किसी दर से २ वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याज पर २७०·४ पौं० तथा ३ वर्ष में २८१·२१६ पौं० हो जाता है। तो ब्याज की दर और मूल ज्ञात करो।

(६) किसी मेले में क, ख, ग तथा घ ने सम्मिलित भोजनालय खोला। उसमें क ने ४० मन, ख ने ३० मन, और ग ने २५ मन बराबर मूल्य का आटा दिया तथा घ ने ३८० रु० दे दिये। तो बताओ कि अन्त में कुल धन उनको किस अनुपात में प्राप्त होना चाहिए?

(७) कोई खेत ४०० फुट लम्बा तथा ३० फुट चौड़ा है और उसमें एक ३० फुट लम्बा, २० फुट चौड़ा व ९$\frac{१}{२}$ फुट गहरा गड्ढा खोदकर उसकी मिट्टी शेष खेत में इकसार बिछाई जानी है तो बताओ कि इससे खेत का तल कितना उठ जायगा।

२

सरल करो :—

(१) (क) $$\frac{\frac{\frac{२}{५}+\frac{१}{६}}{\frac{१}{५}-\frac{१}{६}}-\frac{\frac{१}{५}-\frac{१}{६}}{\frac{१}{५}+\frac{१}{६}}}{\frac{\frac{१}{५}+\frac{१}{६}}{\frac{१}{५}-\frac{१}{६}}+\frac{\frac{१}{५}-\frac{२}{६}}{\frac{१}{५}+\frac{१}{६}}} \div \frac{६०}{६१}$$

(ख) मान ज्ञात करो :—

$$\frac{\cdot२३ + ४\cdot७ \text{ का } \cdot२}{१\cdot३५-(२४ \text{ का } \cdot०५)}$$

(२) (क) १ पौं० ६ शि० ६ पैं० के $१\frac{२}{३}$ तथा ३ पौं० १५ शि० ३ पैं० के $\frac{४}{७}$ में अन्तर ज्ञात करो और प्राप्त फल को १ गिनी की भिन्न में परिवर्तन करो।

(ख) किसी व्यक्ति ने जो किसी जायदाद के $\frac{१०}{१७}$ का मालिक है $\frac{१७}{२५}$ का ·४५ भाग २४००० रु० में बेचा, तो बताओ कि उसे ·३७५ भाग बेचने पर क्या प्राप्त होगा।

(३) (क) किसी २५ लड़कियों की कक्षा की औसत आयु १३ वर्ष ६ मास है। यदि उसमें ११ वर्ष ३ मास की कोई और एक लड़की ले ली जाय तो निकटस्थ मास तक नया माध्य क्या होगा?

(ख) यदि कोई संख्या ४% बढ़ाई जाने पर ३५३६ हो जाती है तो ९% बढ़ा देने पर वह क्या होगी?

(४) (क) १ पौं० चाय और ३ पौं० शकर का मूल्य ६ शि० है किन्तु यदि शकर के भाव में ५०% तेजी आ जाय और चाय का भाव १०% बढ़ जाय तो उनका मूल्य ७ शि० हो जाता है। बतलाओ कि चाय और शकर का पृथक्-पृथक् मूल्य क्या होगा।

(ख) ४ शि० ६ पैं० प्रति पौं० टैक्स देने के पश्चात् ४% ब्याज पर कितने धन से १९३ पौं० १५ शि० वार्षिक आय होगी?

(५) किसी धन पर ५% दर से २ वर्ष के लिए सरल और चक्रवृद्धि ब्याज में १३ शि० ९·६ पैं० का अन्तर है तो वह धन ज्ञात करो।

(६) कोई गाड़ी इटावे से मैनपुरी के लिए १५ मी० प्र० घं० पर रवाना होती है, किन्तु दूसरी गाड़ी इटावे से मैनपुरी के लिए २५ मी० प्र० घं० चाल पर २ घं० पश्चात् चलकर ३ घं० पहले पहुँच जाती है। ज्ञात करो कि दोनों नगर के बीच की दूरी क्या है।

(७) किसी आयताकार चौक में जिसकी भुजाएँ ११:५ के अनुपात में हैं फर्श कराने में १० आना ६ पा० प्रति वर्ग गज की दर से १४४ रु० ६ आ०, व्यय होते हैं तो उनकी लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करो।

३

सरल करो :—

(१) (क) $\frac{६\frac{३}{४} - ३\frac{१}{१६}}{३\frac{२}{५} \text{ का } १\frac{३}{४}} \div \frac{१२\frac{४}{१७} - १\frac{२}{३}}{३\frac{१}{३} \text{ का } \frac{१}{४\frac{१}{६}}}$

(ख) $\frac{७\cdot३५ \times \cdot०१४३}{१५\cdot०१५} - \frac{\cdot१५२ \times \cdot०३३}{२\cdot०९}$

(२) (क) यदि किसी व्यक्ति का ऋण ३७९२५ रु० १४ आ० है और वह रुपये में ३ आ० ४$\frac{१}{२}$ पा० भुगतान कर सकता है तो व्यवहार गणित की रीति से ज्ञात करो कि उसके कर्ज देने वालों को क्या मिलेगा।

(ख) किसी फौज के $\frac{३}{७}$ व्यक्ति लड़ाई में काम आए तथा ६% बीमारी में मर जाने पर ६३९२० आदमी बच रहते हैं तो उसमें कुल व्यक्तियों की संख्या बताओ।

(३) (क) नमक पर ८ आना प्रति मन टैक्स बढ़ने पर ज्ञात हुआ कि उसकी माँग $\frac{१}{८}$ कम हो गई और आय में वृद्धि होने के स्थान पर वह पहली सी ही रही तो बताओ कि पहले उस पर कितना टैक्स था।

(ख) ३ रु० ८ आ० ८ पा० का $\frac{४}{१७}$, ५ रु० ३ आ० ४ पा० की कौन सी दशमलव भिन्न है?

(४) (क) मैंने २०० रु० में एक घोड़ा खरीद कर क को १०%

लाभ से बेच दिया, किन्तु क ने जानवर को हट्टी जानकर उसे फिर मुझे २०० रु० में ही वापस कर दिया। बताओ क को कितनी हानि हुई।

(ख) ३$\frac{१}{३}$ वर्ष में जिस ब्याज दर से ५०२ पौंड १३ शि० ४ पें० के ५७८ पौं० १ शि० ४ पैं० हो जाते हैं उसी दर से कितना धन १$\frac{१}{३}$ वर्ष में ६७८ पौं० ८ शि० हो जायगा ?

(५) कितना धन चक्रवृद्धि ब्याज पर पहले वर्ष के अन्त में ६५० रु० तथा दूसरे वर्ष के अन्त में ६७६ रु० हो जायगा ?

४

सरल करो :—

(१) (क) १$\frac{५}{६}$ का $\dfrac{\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}}{२\frac{१}{२}-३\frac{१}{३}+४\frac{१}{२}} \times \dfrac{\dfrac{२\frac{१}{२}}{\frac{१}{७}}+\dfrac{\frac{३}{१६}}{१\frac{३}{८}}}{\dfrac{३}{४\frac{१}{२}}+\dfrac{४\frac{१}{२}}{३}}$

(ख) $\dfrac{(२\cdot३१)^{३}-(१\cdot६९)^{३}}{(२\cdot३१)^{२}-(१\cdot६९)^{२}}$

(२) (क) वह छोटी से छोटी पूर्ण संख्या बतलाओ जिसे १२६० से गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण-वर्ग प्राप्त हो।

(ख) यदि मैं ·४६२५ यात्रा करने में ९·४२५ घंटे व्यय करूँ तो बताओ कि शेष यात्रा करने में मुझे कितना समय लगेगा।

(३) (क) कोई व्यक्ति १००० पौं० ४ भागों में ऋण देता है। यदि २०० पौं० पर उसे ३% ४०० पौं० पर ३$\frac{१}{२}$%, तथा २५० पौं० पर ५% ब्याज मिलता हो तो बताओ कि उसको औसत ब्याज ३ पौं० १७ शि० प्राप्त होने की दशा में शेष पर किस दर से ब्याज मिलता है।

(ख) ४% ब्याज की दर से २५९·२ रु० पर २ वर्ष के लिए सरल ब्याज ज्ञात करो।

(४) (क) ६ आ० सेर भाव की शकर ८ आ० प्रति सेर वाली में किस अनुपात से मिला दी जाय कि मिश्रण ७ आ० ६ पा० प्रति सेर की दर से २०% लाभ पर बेचा जा सके ?

(ख) क ३०० रु० ख को २ वर्ष, तथा १५० रु० ग को ४ वर्ष के लिए उधार देता है और दोनों से १२० रु० ब्याज प्राप्त करता है, तो ब्याज की दर बताओ।

(५) कोई व्यक्ति जो किसी घाट पर ३$\frac{३}{४}$ मी० प्रति घं० दर से चढ़ सकता और ४$\frac{१}{२}$ मी० प्रति घं० की दर से उतर सकता है, वह उस पर उतर कर २ घन्टे ४ मि० में अपने स्थान पर लौट कर आता है तो उसने कितनी दूरी तै की ?

(६) निम्न दशाओं में फीस चुकाने की कौनसी विधि विद्यार्थियों के लिए अधिक उपयोगी है यदि ब्याज की दर ६% हो ?

"यदि विद्यार्थियों के दाखले की फीस ३० रु० हो और यह फीस प्रत्येक विद्यार्थी से पढ़ाई शुरू करने पर ले ली जाय या कुल फीस तीन किस्तों में, १२ रु० प्रति किस्त पहले, दूसरे और तीसरे वर्ष के आरम्भ में ली जाय।

(७) किसी बन्द लकड़ी के बन्द सन्दूक बनाने में कितने घन फुट लकड़ी लगेगी यदि उसकी बाहरी लम्बाई ६ फुट, चौड़ाई २ फुट ४ इञ्च, ऊँचाई २ फुट २ इञ्च है और लकड़ी १ इञ्च मोटी है ?

सरल करो :—

(१) (क) $$\frac{\frac{१}{१\frac{१}{२}}+\frac{१}{१\frac{१}{३}}+\frac{१}{१\frac{१}{४}}}{३-\left\{\frac{१}{१-\frac{१}{१६}}-\frac{१}{४-\frac{६}{१७}}\right\}}$$

(ख) $$\frac{२५-·००२५\times३·८२\times२५}{८०५५·५\times·०५}$$

(२) (क) वह न्यूनतम धन क्या है जिसका मैं अर्द्ध-क्राउन, फ्लोरिन, शिलिंग या तीन पैं० के सिक्कों में भुगतान कर सकता हूँ ?

(ख) १२ लड़के व १५ लड़कियाँ कोई काम २० दिन में कर सकती हैं, यदि काम पर १० लड़कियाँ और अधिक होतीं तो काम ५ दिन कम में समाप्त हो जाता। तो बताओ कि १ लड़का व १ लड़की पृथक पृथक स्वतन्त्र रूप से उसे कितने समय में कर सकते हैं।

(३) (क) किसी जायदाद का $\frac{1}{6}$, २ पौं० १२ शि० ६ पैं० प्रति एकड़; $\frac{5}{12}$, १ पौं० ११ शि० ६ पैं० प्रति एकड़ व $\frac{1}{4}$, १ पौं० १ शि० प्रति एकड़ की दर से उठाया जाता है और शेष ३१ पौं० १० शि० में दिया जाता है, और इस प्रकार कुल पर औसत लगान २८ शि० प्रति एकड़ पड़ता है। तो बताओ शेष किस दर प्रति एकड़ पर उठाया गया है, तथा जायदाद कुल कितने एकड़ है?

(ख) ७$\frac{1}{2}$% दर पर ३७,००० रु० मूल्य के माल से लदे हुए जहाज का कितने रु० के लिए बीमा कराया जाय कि हानि की दशा में किस्त और माल दोनों का धन प्राप्त हो सके?

(४) (क) कोई व्यक्ति एक ४,००० रु० का मकान किसी दलाल को १६% हानि से बेचता है, किन्तु दलाल उसे १२$\frac{1}{2}$% लाभ से बेच डाले तो खरीदार को क्या देना होगा?

(ख) २५ वर्ष में जिस ब्याज की दर पर ६३८ रु० दूने हो जाते हैं, उसी पर ज्ञात करो कितने समय में २८१ रु० ४ आ० का मिश्रधन ३५१ रु० हो जायेगा।

(५) (क) २ वर्ष के लिए ५% दर से ३०० रु० के सरल ब्याज व चक्रवृद्धि ब्याज का अन्तर ज्ञात करो।

(ख) ५% दर से किसी धन का ३ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ३३१ पौं० ३ पैं० है तो उसका साधारण ब्याज ज्ञात करो।

(६) १९२१ व्यक्तियों का एक फौजी दस्ता ४ नगरों से उनकी जन संख्या के अनुपात से तैयार करना है। यदि उनकी जन संख्या क्रमशः ४१५०, १२४५०, २४९०० तथा २९०५० हो तो, ज्ञात करो कि प्रत्येक से कितने व्यक्ति लिए जायँगे?

६

(१) किसी अंकगणित की पुस्तक में एक प्रश्न निम्न प्रकार छप गया:—

$\frac{१}{६\frac{२}{३}}$, $\frac{१}{५\frac{५}{६}}$, $\frac{१}{\quad}$, $\frac{१}{८\frac{३}{४}}$ का योगफल ज्ञात करो:—

इस प्रकार प्रश्न में एक भिन्न का हर छूट गया था और अन्त में $\frac{५४१}{८४०}$ उत्तर दे दिया गया था, तो अनुपस्थित हर ज्ञात करो।

(२) (अ) $\sqrt{\frac{१}{६}}$ का मान ज्ञात करो।

(ब) २ का वर्गमूल ४ दशमलव स्थान तक ज्ञात करो।

(३) ६ मनुष्य किसी ७ वें के साथ परस्पर कुछ धन एकत्रित करने के लिए तत्पर हुए। उनमें से ६ प्रत्येक १० पौं० तथा ७ वाँ उन सातों के औसत से २ पौं० अधिक देने को था। तो कुल एकत्रित किया जाने वाला धन ज्ञात करो।

(४) (अ) कोई माल ५% लाभ पर बेचा गया, यदि विक्रय-कर्त्ता उसे ३ शि० और अधिक में बेच पाता तो उसे १०% लाभ होता, तो उस माल का क्रय मूल्य ज्ञात करो।

(ब) किस दर से ५०० रु० के ७०० रु० उसी समय में हो जावेंगे जिससे कि २४० पौं० का ब्याज ४% सरल ब्याज पर ३० पौं० होता है ?

(५) (अ) एक ८०० गैलन पानी का हौज ३ नलों द्वारा २५ मि० में खाली हो जाता है। पहला नल दूसरे से प्रति मि० ८ गैलन व दूसरा तीसरे से ३ गैलन कम पानी निकालता है, तो बताओ कि उनमें से पृथक्-पृथक् प्रति मि० कितना पानी निकलता है।

(ब) क, ख, ग किसी व्यवसाय में साझी हैं और उनके भाग $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$ के अनुपात में हैं जिसमें से क, ४ मास पश्चात् अपने धन का $\frac{१}{२}$ निकाल लेता है। किन्तु और ८ मास पश्चात् वह २०२४ रु० का लाभ बाँटते हैं, तो उसमें क का कितना भाग होगा ?

(६) कोई व्यक्ति ५% चक्रवृद्धि ब्याज पर २०० रु० ऋण लेता है, और ब्याज व मूल ५० रु० वार्षिक किस्त में दिये जाते हैं, तो बताओ ३ वर्ष पश्चात् उसे क्या देना शेष होगा ?

८

संक्षेप करो :—

(१) (क) $\dfrac{१\frac{१}{२} \times \frac{१}{५} - \frac{७}{६} \times \frac{३}{४} + \frac{१}{१६}}{१\frac{१}{६} + \frac{३}{४} \div \frac{१}{६} - \frac{१}{५} + \frac{१}{१२}} \times ४\frac{५५}{७३}$

(ख) छः अंकों की सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्या बताओ जो ८, १२, २०, २५, ३२ से पूर्णतः विभाजित हो सके।

(२) एक मनुष्य ने अपनी ३९९० रु० की जायदाद को अपने तीन बच्चों में जिनकी उम्र क्रमशः २०, २५, ३० साल है इस प्रकार बाँटने की वसीयत की कि उनके भाग ६ प्रति सैकड़ा सालाना ब्याज के हिसाब से हर एक की २५ वर्ष की उम्र होने पर बराबर हों। तो बताओ हर एक को क्या मिलेगा।

(३) (क) किसी फुटबाल क्लब के गोलों का औसत ३·४ अपनी ओर तथा ३·६ दूसरी ओर था। यदि वह क्लब दूसरे मैच को अपनी ओर ५ तथा दूसरी ओर २ से जीत जाय तो उसके दोनों औसत बराबर हो जाते हैं। तो बताओ उसने कुल कितने मैच खेले।

(ख) एक पेंशन पाने वाले व्यक्ति ने कुछ साहित्य का कार्य करके अपनी आय २० प्रतिशत बढ़ा ली। यदि इसके साहित्यिक कार्य द्वारा उसको प्रति वर्ष १२ पौं० १० शि० और मिल जाते, तो उसकी आय की वृद्धि २५ प्रतिशत हो जाती। तो उसको क्या पेंशन मिलती थी ?

(४) (क) एक मनुष्य तीन मोटर गाड़ियाँ क्रमशः ३६०, २२० व ३५० पौं० में बेचता। उसको पहली पर २० प्रतिशत और दूसरी पर १० प्रतिशत लाभ होता है किन्तु कुल व्यापार में उसको $३\frac{१}{२}$ प्रतिशत हानि होती है तो तीसरी मोटर गाड़ी की लागत बताओ।

(ख) किसी कुटुम्ब का खर्चा जबकि चावल का भाव २० सेर प्रति रुपया है ५० रु० मासिक है और जब चावल का भाव २५ सेर प्रति रुपया है तो खर्चा ४८ रु० प्रति मास है। यदि और सब खर्चे समान रहें, और चावल का भाव ३० सेर प्रति रु० हो तो उसका मासिक खर्च बताओ।

(५) किसी धन पर दो वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज और सरल ब्याज क्रमशः २५ रु० १० आ० और २५ रु० हैं तो प्रतिशत दर और धन बताओ।

(६) एक मल्लाह एक नदी में बहाव की ओर १२ मील जाकर ८ घण्टे में वापस आ गया। यदि उसको बहाव से चढ़ाव की ओर आने में तिगुना समय लगा हो तो नदी की चाल और शान्त जल में नाव की चाल बताओ।

९

सरल करो :—

१. (क) $\dfrac{२\frac{१}{४} - \frac{५}{६} \text{ का } \frac{२}{३}}{\frac{१}{३} \text{ का } २\frac{१}{३} + \frac{७}{८}} \div \dfrac{३\frac{१}{२} - \frac{१}{३} \div \frac{४}{१३}}{१\frac{१}{४} \text{ का } ८\frac{१}{२}} + \dfrac{१}{१ + \frac{५}{१६}}$

(ख) संख्या ४५६·६५४ में अंकों के स्थानीय मान बताओ।

२. (क) $\frac{७}{८}$ तथा $\frac{१}{११}$ के योगफल, अन्तर और गुणनफल का चतुर्थानुपाती ज्ञात करो।

(ख) क कोई काम ३ दिन में कर सकता है किन्तु ख उससे तिगुना ८ दिन में, और ग उससे पाँच गुना १२ दिन में कर सकता है। यदि वे तीनों ९ घंटे प्रति दिन मिलकर काम करें तो उसे कितने समय में समाप्त कर देंगे ?

३. (क) किसी ७५० बालकों की पाठशाला में औसत आयु १५·४ वर्ष है, किन्तु उनमें से ५० लड़कों के चले जाने से वह १५·२ रह जाती है, तो छोड़ने वालों की औसत आयु ज्ञात करो।

(ख) कोई खरगोश शिकारी कुत्ते से अपने ८० छलाँग आगे है, और उसके तीन छलाँग कुत्ते के २ के बराबर हैं किन्तु वह एक छलाँग में ही इतनी दूरी तै करता है जितनी कि खरगोश २ में। बताओ कि पकड़े जाने के पहले खरगोश इस दशा में कितने छलाँग भर सकता है ?

४. (क) कोई दुकानदार ६ आना दर्जन की दर से अंडे क्रय करता है और १० आ० ८ पा० कोड़ी की दर से बेच देता है, बताओ कि उसे क्रय मूल्य पर कितनी हानि या लाभ रहता है।

(ख) किसी फौज के ७३०० सिपाहियों के ४ दस्ते इस प्रकार बनाये जाते हैं जिससे कि प्रथम के $\frac{1}{2}$, दूसरे के $\frac{2}{3}$, तीसरे के $\frac{3}{4}$ और चौथे के $\frac{4}{5}$ में समान जन-संख्या है। बताओ कि प्रत्येक में कितने व्यक्ति हैं।

(५) कोई दूकानदार ३४,४८१ पौं० इस शर्त पर ऋण लेता है कि प्रत्येक वर्ष के अन्त में वह मूल का कुछ भाग और शेष धन पर ५% ब्याज दे दिया करेगा। प्रकट करो कि ९,७२४ पौं० १ शि० प्रति वर्ष देकर वह ४ वर्ष में कुल ऋण चुका देगा।

(६) कोई अफसर अपने फौजी दस्ते को १२ गहराई के वर्ग में लगा सकता है। यदि दस्ते में कुल १२९६ व्यक्ति हों, तो खोखले वर्ग की अग्रपंक्ति में कितने व्यक्ति होंगे ?

१०

सरल करो :—

(१) (क) { ७$\frac{1}{3}$ × १$\frac{5}{6}$ + $\frac{2}{4}$२ × ·$\frac{2}{3}$ } का $\frac{२\frac{2}{5}}{३६\frac{5}{6}}$

(ख) २८९३७२५७ को २ × ३ × ५ × ७ × ११ से संक्षिप्त भाग की रीति से भाग दो और पूर्ण शेष ज्ञात करो।

(२) (क) ·६१८०२२५ तथा ·०००१४४ का वर्गमूल ज्ञात करो।

(ख) ४११२ वस्तुओं का मूल्य ४ पौं० १ शि० ७$\frac{1}{2}$ पैं० प्रति वस्तु की दर से व्यवहारगणित की रीति से ज्ञात करो।

(३) (क) यदि २·२३७५ पौं० की मंदी किसी माल पर आने से किसी दुकानदार को ५½% लाभ से ५½ पैं० प्रति पौं० का घाटा होता है, तो उसके माल का क्रय मूल्य ज्ञात करो।

(ख) ५ पौं० ६ पुरुष, १२ स्त्री तथा १७ लड़कों में इस प्रकार बाँटना है कि २ आदमियों को ५ लड़कों के बराबर मिले और २ स्त्रियों को ३ लड़कों के बराबर मिले। बताओ कि उनको पृथक-पृथक क्या मिलेगा ?

(४) तीन वर्ष पश्चात् दिए जाने वाले ३१७० पौं० ७ शि० ६ पैं० का धन प्रथम, द्वितीय और तृतीय वर्ष के उपरान्त तीन किस्तों में दिया जाने को है, यदि ब्याज की दर ४% हो तो बतलाओ कि सरल तथा चक्रवृद्धि ब्याज की रीति से पृथक-पृथक तीनों वर्ष में क्या दिया जाना चाहिये।

(५) (क) १५०×२४२ गज के खेत में आलुओं की पंक्तियाँ हैं। यदि दो-दो पंक्तियों के बीच की दूरी १५ इंच हो, तो बताओ कि कुल खेत में ऐसी कितनी पंक्तियाँ हैं।

(ख) किसी १०० गज की भुजा के वर्ग के दो सम्मुख कोनों से क तथा ख एक ही दिशा में चलते हैं और क जब कि १९ गज चलता है तो ख १६ गज। बताओ कि वे वर्ग के किस भाग में मिलेंगे और वे जिस कोने से चले हैं, उसको कितनी बार पार करेंगे।

प्रश्न-पत्र हाई स्कूल परीक्षा उ० प्र० बोर्ड

१९५२

(खण्ड क)

१. (क) वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जिसमें यदि ३ जोड़ें तो २४, ३६, ४८ से पूरी बँट जाय।

(ख) नीचे लिखे का मान निकालो :—

$$\frac{(३·४७)^२-(२·५३)^२}{१-·०६}$$

२. (क) ८५३७७६ का वर्गमूल निकालो।

(ख) छः संख्याओं का औसत मध्यमान ३५४$\frac{३}{४}$ है। यदि पहली तीन का औसत २४६$\frac{३}{४}$ है, तो शेष तीन का औसत बताओ।

३. (क) किसी पाठशाला में २५० विद्यार्थी हैं, जिनमें से १२% मुसलमान हैं, ७२ प्रतिशत हिन्दू हैं और शेष ईसाई। ईसाई विद्यार्थियों की संख्या बताओ।

(ख) एक वस्तु ५% लाभ पर बेची गई। यदि उसे ५% हानि पर बेचा जाता तो १५ रुपये कम मिलते। उस वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात करो।

४. (क) क, ख, ग ने मिलकर एक दुकान खोली। क ने ७०० रु० लगाये, ख ने ५०० रु० और ग ने १२०० रु०। यदि उनको ९०० रु० का लाभ हुआ तो उसे उन तीनों में किस प्रकार बाँटा जाय?

(ख) ५ बैल या ७ घोड़े किसी खेत की घास को ८७ दिन में खाते हैं। बताओ कि २ बैल और ३ घोड़े उससे आधे खेत की घास को कितने दिन में खायँगे।

५. यदि १००० रु० पर ५ वर्ष के लिए साधारण ब्याज २५० रु० है तो ३५०० रु० पर उसी ब्याज की दर से ३ वर्ष के लिए कितना ब्याज होगा ? 10

६. (क) ३ इंच व्यास वाले एक ठोस गोले का आयतन निकालो। 4

(ख) एक गाड़ी का पहिया जिसका व्यास २८ इञ्च है एक मिनट में १४४ चक्कर लगाता है। बताओ गाड़ी कितने मील प्रति घंटा चलती है। 6

(खण्ड ख)

७. (क) कुछ कंकड़ का आयतन एक घन के बराबर है जिसकी भुजा १० फीट है। इतने कंकड़ को ३० फीट चौड़ी सड़क पर ९ इञ्च मोटी तह में बिछाने से कितनी दूर तक सड़क पर कंकड़ बिछ जायेगा। 5

(ख) २४ आदमियों, ३६ औरतों और ७२ बच्चों में १०८० रुपये इस प्रकार बाँटे गये कि २ आदमियों को उतना ही मिला जितना ३ औरतों को, और एक औरत को उतना ही मिला जितना २ बच्चों को। बताओ प्रत्येक आदमी, औरत और बच्चे को अलग-अलग कितना रुपया मिला। 5

८. नीचे लिखे खेत का मानचित्र बनाओ और उसका क्षेत्रफल निकालो। 10

	गज	
	⊙ च को	
	१८०	
८० घ को	१५०	
४० ग को	१२०	
६० ख को	५०	५० छ को
	⊙ क से	

९. क ने एक वस्तु ख के हाथ २५% लाभ पर बेची, ख ने उस वस्तु को २०% लाभ पर ग को बेची और ग ने उस वस्तु को २८% लाभ पर बाजार में बेची। यदि वह वस्तु बाजार में १६ शिलिंग की बिकी तो बताओ क ने उसे कितने दाम में खरीदी थी। 10

१०. कुछ समय में २½% की दर से मूलधन और साधारण ब्याज दोनों मिलकर ४५० रु० हो जाते हैं। यदि ब्याज मूलधन का ३/८ है तो बताओ कितने समय में ब्याज इतना हुआ। 10

(खण्ड ग)

११. (क) एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल १० एकड़ है। एक मनुष्य उस खेत का एक पूरा चक्कर १० मिनट में लगा लेता है। बताओ वह मनुष्य कितने मील प्रति घण्टा की चाल से चलता है। 5

(ख) एक चुनाव में वोट देने वालों की कुल संख्या के ७/८ ने वोट दिये, क को ख से सवाये वोट मिले और वह ३५० वोटों से जीत गया। वोट देने वालों की कुल संख्या बताओ। 5

१२. एक हलवाई १० आने सेर दूध मोल लेता है और उसमें पानी मिलाकर १२ आने सेर बेचता है। इस प्रकार यदि वह ६०% का लाभ करता है तो बताओ एक सेर दूध में वह कितना पानी मिलाता है। 10

१३. १००० रुपयों के ऐसे दो भाग करो कि एक भाग को यदि ४% साधारण ब्याज पर २½ वर्ष के लिए उधार दिया जाय और दूसरे भाग को ५% साधारण ब्याज पर ३½ वर्ष के लिए उधार दिया जाय तो कुल ब्याज मिलकर १२७ रु० हो जाय। 10

१४. नीचे लिखे आँकड़े भिन्न-भिन्न वर्षों में भारत से जाने वाले माल का मूल्य (करोड़ रुपयों में) बताते हैं:— 10

वर्ष सन्	१८६०	१८७०	१८८०	१८९०	१९००	१९१०	१९२०
मूल्य करोड़ रुपयों में	१७	२३	३१	३९	५०	६३	७६

ऊपर लिखे हुए का लेखा-चित्र बनाकर यह बताओ कि सन् १९१५ में भारत से कितने मूल्य का माल गया होगा।

१९५३

खण्ड क

१. (क) सरल करो :—

$$७\frac{२}{३} \text{ का } \frac{५}{२३}+\frac{२}{३}\div\frac{१}{२}+\frac{७}{८}\div\frac{७}{१६} ।$$ 5

(ख) १० बोरी सीमेंट कितने रुपयों में आयेगा यदि एक बोरी में १ मन १४ सेर सीमेंट आता है और एक मन सीमेंट का दाम २ रु० ८ आ० है ? 5

२. (क) २५·६०३६ का वर्गमूल निकालो । 5

(ख) क, ख, ग की औसत मासिक आय ४० रु० है । ख, ग, घ की औसत मासिक आय ५० रु० है । यदि घ की मासिक आय ६० रु० है, तो क की मासिक आय बताओ । 5

३. (क) एक मनुष्य अपनी मासिक आमदनी का ८०% खर्च करके १२० रु० बचाता है । बताओ उसकी मासिक आमदनी क्या है और उसका मासिक खर्च क्या है ? 5

(ख) १७३६ रुपयों को क, ख, ग और घ में इस तरह बाँटो कि उनके भाग २, ३, ४, ५ के अनुपाती हों । 5

४. एक दुकानदार ने ४०० रु० का गेहूँ मोल लिया । उसने आधे को १० प्रतिशत हानि पर और शेष (बाकी) आधे को २० प्रतिशत लाभ पर बेचा । बताओ उसे कितने प्रतिशत लाभ या हानि हुई । 6

५. यदि किसी धन पर ३ प्रतिशत वार्षिक की दर से ३ वर्ष का साधारण ब्याज २२ रु० ८ आ० हो, तो वह धन बताओ । 4

६. (क) एक वृत्ताधार सम बेलन की ऊँचाई ५ फुट है और उसके आधार की त्रिज्या ७ फुट है, उसका आयतन निकालो। 5

(ख) एक पहिये की त्रिज्या १४ इञ्च है, बताओ वह $\frac{१}{३}$ मील जाने में कितने चक्कर लगायेगा। 5

खण्ड ख

७. (क) दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक १३ है और उनका लघुतम समापवर्त्य ५०८३ है। यदि उनमें से एक संख्या २२१ है तो दूसरी संख्या बताओ। 4

(ख) एक परीक्षा में जितने परीक्षार्थी बैठने वाले थे उनका ०·०७ बीमार पड़ गया शेष (बाकी) का $\frac{१२}{३१}$ फेल हो गया, और ११४ पास हुए। बताओ कुल कितने परीक्षार्थी थे। 6

८. क, ख, ग ने एक चराई का मैदान एक वर्ष के लिए ४८० रु० लगान पर लिया। क ने अपनी ३० गायें १० महीने तक, ख ने ४० गायें ६ महीने तक और ग ने १५ गायें पूरे १२ महीने तक चराईं। प्रत्येक को कितना लगान देना चाहिये ? 10

९. एक कमरे का फर्श २५ फुट लम्बा और १७ फुट चौड़ा है और उसकी दीवारें १८ इञ्च मोटी हैं, दीवारों के बाहर कमरे के चारों ओर ९ फुट चौड़ा एक बरामदा है। बरामदे का क्षेत्रफल बताओ। 10

१०. एक दिन रोगी का तापक्रम नीचे लिखे सारिणी के अनुसार था। लेखाचित्र खींचकर बताओ कि ४ बजे सायंकाल पर उसका तापक्रम क्या था :—

समय	७ प्रातः	९ प्रातः	११ प्रातः	१ सायं	३ सायं	५ सायं
तापक्रम डिग्री फारेनहाइट	९८·४°	९९°	१००·१°	१०२·५°	१०१·२°	१००·२°

10

खण्ड ग

११. (क) एक ठोस वृत्ताधार सम शंकु की ऊँचाई २ इञ्च है और उसके आधार की त्रिज्या ४ इञ्च है। बताओ उसको पिघला कर उसमें से १ इञ्च व्यास वाले कितने ठोस गोले बनेंगे।

(ख) एक दुकानदार १५ रु० प्रति मन की दर से गेहूँ, और ८ रु० प्रति मन की दर से जौ खरीदता है। यदि प्रति एक मन गेहूँ में ५ सेर जौ मिलाकर वह इस मिश्रण को १६ रु० प्रति मन के भाव से बेचता है, तो बताओ वह कितने प्रतिशत लाभ करता है।

१२. एक ठेकेदार ने एक काम को ८० दिन में पूरा करने का ठेका लिया और ३० आदमी लगाकर काम शुरू किया। ५० दिन में केवल $\frac{१}{२}$ काम हो पाया। बताओ अब वह कितने आदमी अधिक लगाये कि काम समय पर पूरा हो जाय।

१३. किसी समय के लिये ८०० रु० पर ४ प्रतिशत की दर से साधारण ब्याज लगता है; और दो वर्ष अधिक समय के लिये १००० रु० पर ५ प्रतिशत की दर से साधारण ब्याज लगता है। दोनों ब्याज मिल कर ३४६ रु० होते हैं। दोनों धनों के लिये समय बताओ।

१४. एक आदमी कुछ फूल लेकर अपने घर से चला और एक मन्दिर में जाकर प्रार्थना की कि यदि उसके फूल दुगुने हो जायँ तो वह २४ फूल चढ़ायेगा। उसके फूल दुगुने हो गए और उसने २४ फूल चढ़ा दिये। शेष को लेकर वह दूसरे मन्दिर में गया और इसी प्रकार वहाँ भी उसके फूल दुगुने हो गए और वहाँ भी उसने २४ फूल चढ़ा दिये। शेष को लेकर वह तीसरे मन्दिर में गया और वहाँ भी उसके फूल दुगुने हो गये और उसने २४ फूल चढ़ा दिये। जब वह तीसरे मन्दिर से बाहर निकला तब उसके पास एक भी फूल न रहा। बताओ वह कितने फूल लेकर घर से चला था।

१९५४

खण्ड क

१. (क) १८, २७, २८, ३६, ५४ का लघुतम समापवर्त्य निकालो ।

(ख) सरल करो (Simplify) :—

$$\frac{१}{२} + \frac{१}{२} \text{ का } \frac{१}{२} \div \frac{१}{२} \text{ का } \frac{१}{२} \times \frac{१}{२} - \frac{१}{२}$$

२. (क) १५२·५२२५ का वर्गमूल निकालो ।

(ख) एक आदमी ने १०,००० रुपये से व्यापार शुरू किया। पहली बार उसे १० प्रतिशत की हानि हुई। शेष (बाकी) रुपये से उसने फिर व्यापार किया। इस बार उसे २० प्रतिशत का लाभ हुआ । बताओ अब उसके पास कितना रुपया है।

३. (क) ७५८१ रुपयों को ५, ७, ९ के अनुपात में बाँटो।

(ख) एक कक्षा में ३५ विद्यार्थी थे। उनमें १० वर्ष की आयु वाले १० विद्यार्थी थे, १२ वर्ष की आयु वाले १२ विद्यार्थी थे और १३ वर्ष की आयु वाले १३ विद्यार्थी थे। कक्षा के एक विद्यार्थी की औसत आयु बताओ।

४. एक आदमी अपना एक घोड़ा ७७० रुपये में बेचता है और उसे विक्रय मूल्य का $\frac{१}{७}$ लाभ होता है। बताओ उसने वह घोड़ा कितने रुपयों में खरीदा था और उसे कितने प्रतिशत लाभ होता है?

५. यदि साधारण ब्याज पर ३$\frac{३}{४}$ वर्ष में ५२० रु० का मिश्रधन ६०२ रु० १४ आ० हो जाता है, तो ब्याज की दर बताओ।

६. (क) ७ इञ्च व्यास वाले गोले का आयतन निकालो ।

(ख) एक आयताकार बाग ९० फुट लम्बा और ४२ फुट चौड़ा है। उसके तुम कितने चक्कर लगाओगे कि तुम पूरे तीन मील टहल सको?

खंड (ख)

७. क ने १२५ रु० लगाकर एक दूकान खोली। दो महीने बाद ख भी कुछ रुपये लगाकर साझीदार हो गया। दूकान खुलने के एक साल के अन्त में

जो लाभ हुआ वह क और ख में ३ : ५ के अनुपात में बाँटा गया। बताओ ख ने कितने रुपये लगाये थे।

८. १ इंच = १०० गज मान कर नीचे लिखे से खेत का मानचित्र बनाओ और उसका क्षेत्रफल निकालो :—

	गज	
	⊙घ को	
	५५०	
	५००	८० ग को
	३१०	१६० ख को
२०० च को	१८०	
	⊙क से	

९. १ आदमी या २ लड़के किसी काम को ४० दिन में करते हैं। बताओ ३ आदमी और ४ लड़के उससे आधे काम को कितने दिनों में करेंगे ?

१०. एक आदमी ने एक ही समय पर ३६० रु० क को और ४८० रु० ख को ५% साधारण ब्याज पर दिये। बताओ कितने समय बाद उसे दोनों से कुल मिला कर ६३ रुपये ब्याज के मिलेंगे।

(खंड ग)

११. (क) एक आदमी अपनी मासिक आमदनी का (एक महीने में) $\frac{1}{6}$ भाग खाने में खर्च करता है, ३० रु० कपड़ों में, ४० रु० बच्चों की पढ़ाई में, २० रु० मकान के किराये में खर्च करता है और उसके पास ३० रु० बचते हैं। उस आदमी की मासिक आमदनी क्या है ?

(ख) उस वृत्ताकार समशंकु की ऊँचाई बताओ जिसके आधार का व्यास २ फुट ६ इंच है और जिसका आयतन उस वृत्ताकार सम बेलन के आयतन के बराबर हो जिस (बेलन) की ऊँचाई १२ फुट ३ इञ्च है और आधार का व्यास २ फुट है।

१२. एक कुटुम्ब का औसत मासिक खर्चा विभिन्न वर्षों में नीचे लिखी सारणी के अनुसार था। लेखाचित्र खींच कर बताओ कि सन् १९२८ में उसका मासिक खर्चा क्या था :—

वर्ष सन्	१९०३	१९१३	१९२३	१९३३	१९४३
खर्चा रुपयों में	१६२	१६८	१७६	१८८	२०५

१३. एक तेल बेचने वाला दुकानदार ५० रु० प्रति मन के भाव से सरसों का तेल खरीदता है और ४० रु० प्रति मन के भाव से अलसी का तेल खरीदता है। वह एक मन सरसों के तेल में ५ सेर अलसी का तेल मिलाता है और इस मिश्रण को ६० रु० मन के भाव से बेचता है। बताओ वह कितने प्रतिशत लाभ करता है।

१४. एक आदमी के तीन बेटे थे। उसने कुछ आमों का $\frac{१}{२}$ भाग तथा आधा आम अधिक पहले बेटे को दिया। बचे हुए आमों का $\frac{१}{२}$ भाग तथा आधा आम अधिक दूसरे बेटे को दिया। बचे हुए आमों का $\frac{१}{२}$ भाग तथा आधा आम अधिक तीसरे बेटे को दिया। अब बचा केवल एक आम जो उसने खुद खा लिया। कोई भी आम काटा नहीं गया बताओ वह आदमी बाजार से कितने आम लाया था।

१९५५

१. (क) १२९·०४९६ का वर्गमूल निकालो।

(ख) एक कक्षा में २० लड़के हैं। उनकी अवस्थाओं का औसत १३ वर्ष है। यदि ५ लड़के, जिनकी अवस्थाओं का औसत ८ वर्ष है, उस कक्षा में और भरती हो जायें तो उस कक्षा के लड़कों की अवस्थाओं का औसत बताओ।

२. (क) निम्न को सरल करो :—

$१\frac{१}{२}$ का $\frac{१}{२} \div \frac{३}{५}$ का $२\frac{१}{२} \times २\frac{१}{३} - \frac{१}{२}$ का $\frac{१}{३}$ ।

(ख) एक आदमी अपनी सम्पत्ति का १/३ बड़े लड़के को और शेष का १/४ छोटे लड़के को तथा बाकी धन अपनी स्त्री को देता है। यदि स्त्री को १२५० रु० मिला तो उसका कुल धन कितना था ?

३. (क) वह बड़ी से बड़ी संख्या बताओ जो ४६८ और ६६३ को पूरा-पूरा विभाजित कर सके (बांट सके) ।

(ख) क और ख एक व्यवसाय में क्रमानुसार १६०० रु० और २००० रु० लगाते हैं। वे ४ महीने बाद ग को साझीदार बनाते हैं जो ४२०० रु० लगाता है। वर्ष के अन्त में ५०० रु० का लाभ हुआ तो बताओ लाभ में से प्रत्येक को कितना-कितना मिलना चाहिये।

४. (क) तीन संख्याओं का योगफल १५०० है और वे ७, १० और १३ की अनुपात में है; तो संख्याएँ बताओ।

(ख) एक दूकानदार ने फलों की २५ टोकरियाँ २ रु० प्रति टोकरी की दर से खरीदीं। ५ टोकरियों के फल सड़े निकल गये और फेंक दिये गये। बताओ कि वह बाकी टोकरियाँ किस दर से बेचे कि उसे $१२\frac{१}{२}$ प्रतिशत लाभ हो।

५. (क) २३३ रु० ५ आ० ४ पा० का ४ प्रतिशत वार्षिक की दर से $४\frac{२}{३}$ वर्ष का ब्याज निकालो।

(ख) यदि ४ वर्ष में ४७५० रु० का मिश्रधन ६६५० रु० हो तो उसी दर से कितने समय में ८५० रु० का मिश्रधन १३६० रु० हो जायगा ?

६. (क) एक आयताकार बाग ४८४ गज लम्बा और ३६३ गज चौड़ा है, तो उसके चारों ओर २ आना प्रति गज की दर से तार लगाने में क्या खर्चा होगा ?

(ख) एक कमरा १४ फुट लम्बा, १२ फुट चौड़ा और ११ फुट ऊँचा है। उसकी दीवारों पर ४ आने प्रति वर्ग फुट की दर से कागज लगाने का क्या खर्चा होगा यदि कमरे में एक दरवाजा ७ फुट ऊँचा और ४ फुट चौड़ा तथा एक खिड़की ४ फुट ऊँची और ३ फुट चौड़ी है ?

७. (क) एक वृत्ताधार सम शङ्कु की ऊँचाई ७ फुट और आधार (base) का व्यास ८ फुट है तो उसका आयतन बताओ।

(ख) ८ फुट व्यास के एक पीतल के गोले को गला कर एक वृत्ताकार सम बेलन बनाया गया है। यदि बेलन के आधार का व्यास ६ फुट है तो उसकी लम्बाई बताओ।

८. एक वर्गाकार प्रदेश की प्रत्येक भुजा १० मील है। इसके कुछ भाग का मानचित्र १ मील को ३ इंच मान कर खींचा गया है और शेष १ मील को २ इंच मान कर खींचा गया है। इन दोनों भागों के मानचित्र का क्षेत्रफल ६२५ वर्ग इंच है; तो प्रत्येक भाग का क्षेत्रफल बताओ।

९. १ इंच = १०० गज मान कर नीचे लिखे खेत का चित्र बनाओ और उसका क्षेत्रफल निकालो।

	गज	
	*घ तक	
	५५०	
	४९०	६० ग को
७० च को	४४०	
९० छ को	२६०	
	१४०	१०० ख को
	* क से	

(१०) एक गाँव में भिन्न-भिन्न वर्षों में जितनी भूमि में गेहूँ बोया गया था उसका क्षेत्रफल नीचे की सारणी में दिया हुआ है। लेखा चित्र

खींच कर, अनुमान करो कि सन् १९२६ में कितनी भूमि में गेहूँ बोया गया रहा होगा।

वर्ष	१९२१	१९२२	१९२५	१९२७	१९३०
क्षेत्रफल (बीघों में)	३५०	४००	४५०	५००	५५०

१९५६

१. दशमलव के दो अङ्कों तक निम्नलिखित का मान निकालो :—

$$\sqrt{५+\frac{२८\cdot६\times८}{५}}+\sqrt{०\cdot३८}।$$

२. (क) गायों का एक समूह ऐसा है कि उसकी गायें बराबर-बराबर संख्या में तीन मार्गों से जा सकती हैं, सात नदियों का जल पी सकती हैं, १८ पेड़ों के नीचे बैठ सकती हैं और २१ आदमियों से दुही जा सकती हैं। समूह में कम से कम गायों की संख्या बताओ।

(ख) वह बड़ी से बड़ी संख्या बताओ जिससे १४२, १६६ और २३७ को भाग देने पर क्रमानुसार ४, ५ और ७ शेष बचते हैं।

३. (क) एक नगर की जन-संख्या १० प्रतिशत प्रति वर्ष बढ़ती है। यदि इस समय जन-संख्या १,००,००० हो, तो ५ वर्ष बाद जन-संख्या क्या होगी?

(ख) क्रिकेट की एक टीम के १० खिलाड़ियों के रन का औसत १०½ है। यदि ११ वें खिलाड़ी के खेलने के बाद टीम का औसत बढ़कर २० हो जाय, तो ११ वें खिलाड़ी ने कितने रन बनाये?

४. एक पंसारी ने ४० रुपये की शक्कर खरीदी। उसकी एक चौथाई उसने ५ प्रतिशत हानि से बेच दी। बताओ शेष का विक्रय मूल्य कितने प्रतिशत बढ़ा दिया जाय कि कुल शक्कर बिकने पर पंसारी को ५ प्रतिशत लाभ हो।

५. किसी धन का एक वर्ष का साधारण ब्याज ५ पौंड ८ शि० ४ पें० है और उसी दर से २ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ११ पौं० १ शि० है। ब्याज की दर और मूलधन ज्ञात करो।

६. निम्नलिखित क्षेत्र की रचना करो तथा उसका क्षेत्रफल निकालो :—

	गज़	
	⊙ च को	
	१२०	
	९०	७० छ को
६० घ को	७५	
४० ग को	६०	
३० ख को	२५	
	⊙ क से	

७. एक बेलन के आकार के नल (ट्यूब), की लम्बाई २४ इञ्च है। उसका बाहरी व्यास $\frac{७}{२}$ इञ्च और भीतरी व्यास $\frac{५}{२}$ इञ्च है। नल को गलाकर एक ठोस गोला बनाया जाता है, तो गोले का व्यास बताओ।

८. (क) उस त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालो जिसकी भुजायें १० फुट, २४ फुट और २६ फुट की हैं।

(ख) एक वृत्ताकार मैदान का व्यास २३ फुट ४ इंच है। एक व्यक्ति उसके बाहरी किनारे पर ५ मील प्रति घण्टा के वेग से चलता है। बताओ वह पचास मिनट में मैदान के कितने चक्कर लगायेगा। ($\pi = \frac{२२}{७}$)।

९. क एक घर के लिये ९६० रु० देने को तैयार है और ख उसी घर के लिए ९३८ रु० देने को कहता है, परन्तु वह रुपया ४ महीने के अन्त में देगा। यदि ब्याज की दर ५ रुपया सैकड़ा प्रति वर्ष हो, तो बताओ घर को किसके हाथ बेचा जाय कि बेचनेवाला इस समय अधिक लाभ में रहे।

१०. एक मनुष्य ६,००० रु० का स्टॉक ६८$\frac{१}{२}$ की दर से लेता है और उसका $\frac{१}{३}$ भाग ७० की दर से और शेष ६८ की दर से बेचता है। यदि प्रत्येक दशा में दलाली $\frac{१}{८}$ प्रतिशत हो तो बताओ उसे कितना लाभ या घाटा होता है।

११. (क) जब ब्याज की दर ६$\frac{१}{४}$ रु० सैकड़ा हो, तब ४ महीने के अन्त में देय ६,००२ रु० ८ आ० के बिल पर व्यावहारिक और ठीक बट्टों का अन्तर बताओ।

(ख) एक व्यक्ति ने आढ़तिये द्वारा ६,७५० रुपया का माल मोल लिया। यदि मोल लेनेवाले को ७,००३ रु० २ आ० देना पड़ा तो आढ़तिये के कमीशन की दर बताओ।

———

उत्तर माला

प्रश्नावली १

अंकनपद्धति तथा संख्यालोकन

(२) ५०००; ९००; ३०; ६ (३) १००००; ००००; ६००; २०; ० (४) ८००००; ८०००; ८००; ८०; ८ (५) ४०००००; ५००००; ७०००; ३००; ९०; ५ (६) १९९५ (७) २९९१० (८) एक हजार सात सौ चार (९) उन्नीस हजार दो सौ सैंतीस (१०) सात लाख अस्सी हजार दो सौ छप्पन (१२) ५६०८; (१३) ७४००११ (१४) ६८०१९३४५ (१५) १०००००; ९९९९ (१७) ९९९; १०० (१८) १००००००; ९९९९९९९ (१९) ४९९३; ४००३ (२०) ६×१००+४×१०+९; १×१०००+८×१००+७×१० +३ (२१) ३४५; ६७८; ३२१; २१०; ६०४; ३ (२२) १० य+र; १० र+य

प्रश्नावली २

चार मूल नियम

(२) ९९०३६ (३) १८४४०८८ (४) ७, २, ७, २ दक्षिण ओर से

(५)

८	१	६
३	५	७
४	९	२

(६)

५	२	१	८
१	७	५	३
८	१	३	४
२	६	७	१

(७) स = ३; ब = ८ (८) (क) अ = २; ब = ६; स = २; द = १; य = ४ (ख) अ = ८; ब = ९; स = ३; द = १ (९) अ = ४; ब = २; स = ८; द = ५; य = ७ (११) ४२२२४० (१२) १५४१६५३ (१३) ४११८५१४२५२८ (१४) ३८२२६४१९१३६०

(१६) गुणक ७५३ (१७) गुणक, ३० (१९) शेष २०९ (२०) २३३ (२१) प्रथम ६८७३४ (२२) अ = ६ (२३) (क) ३२ (ख) ८७५६४ (ग) ३०००० (२४) (क) भाजक, १४६० (ख)

४७) ३१८९ (६७
२८२
३६९
३२९
४०

(२५) भाज्य, १२३९३४; भागफल, २२९; शेष, ४५ (२७) ६२५ (२८) १००११ (३०) ११८२ (३१) २१४२ (३२) २४५७ (३३) ३४ रु० ५ आ० १ पा० (३४) २०५ रु० ६ आ० ७ पा० (३५) क = २; ख = १३ (३६) ७३ (३७) २४३९ (३८) १६२६ (३९) ६११०१४००० (४०) ३७१६ पौं० (४१) ११६१ (४२) २० किलोमीटर ९०८$\frac{1}{4}$ मीटर (४३) ५६१; ९४३ (४४) ४·३ वर्ष (४५) ३ पौं० ९ शि० (४६) २८.३५ ग्राम

प्रश्नावली ३
गुणनखण्ड तथा अभाज्य संख्याएँ

(२) १, २, ३, ५, ७, ११, १३, १७, १९, २३, २९, ३१, ३७, ४१, ४३ (३) १७, १९, २३, २९, ३१, ३७, ४१, ४३, ४७, ५३, ५९, ६१, ६७, ७१, ७३, ७९ (४) ५३, ५९, ६१, ६७, ७१, ७३, ७९, ८३, ८९, ९७ (५) ४१, ४३, ४७, (७) २, २, ३, ७, (८) २, ७, ७, (९) २, २, २, ६७ (१०) २, २, ७, १३९ (११) ५, ७, ११, १९ (१२) २, २, २, २, २, २, २, २, ३, ३, ३, ३, ५, ७ (१४) नहीं (१५) हाँ (१६) नहीं (१७) नहीं (१८) हाँ (१९) नहीं (२०) हाँ (२१) हाँ (२२) १७ (२४) ५ (२५) ३, ५, ७, ११ (२६) ३, ५, ७, ११, १९, (२७) २३ (२८) २९ व ३ (३०) (अ) ८७३०, ३०७८ (ब) ८७३०, ३७८० (स) ८७३०, ३०७८ (३१) (अ) २ (ब) ३ (स) ५ (द) ० (३२) (अ) ५ (ब) ० या ८

(स) १ (द) ७ (३३) ९९० (३४) (अ) १२४० (ब) १५५० (स) १५५०, १५७५, १७०० (द) ७११० (य) १७०० (३५) (अ) ३ (ब) २ (स) ०,९ (३६) (अ) २ (ब) ४ (स) २ (३७) १, २, ३, ५, ७, ११, १३, १७, १९, २३, २९, ३१, ३७, ४१, ४३, ४७, ५३, ५९, ६१, ६७, ७१, ७३, ७९, ८३, ८९, ९७, (३८) हाँ (३९) ४३, ४५, ४७

प्रश्नावली ४

म० स० तथा ल० स०

(२) ३ पैं० (३) १८० गैलन (४) ४ इंच प्रत्येक (५) अगले दिन ११ बजकर ३२ मिनट पर (७) बालक, १७ कक्षाएँ; बालिकाएँ; ११ कक्षाएँ; योगफल, २८ कक्षाएँ (८) २४८; संदूक, १०९ (१३) ७१ (१४) १०१ (१६) १२ (१७) २२४ (१८) ३१ (२०) २४, ३६०; ७२, १२० (२१) ३१, ३७२; ९३, १२४ (२३) ६, ९; ३,१२ (२५) २४९९, २८४२ (२६) ११०७ और ३५१० (२८) ८६४ (२९) ४ वर्ग फुट (३१) २४०७ (३२) ८४०६ (३४) ३०६५२ (३५) ५५०९३५ (३६) ७७२९ (३८) १२ (३९) ७ सप्ताह (४०) $\frac{१}{३}$" (४२) २५० बार (४३) पहला, ९ बार; दूसरा, ६ बार; तीसरा, ४ बार (४५) ६२० (४६) ६३७५० (४७) २३९५ (४९) १०० (५०) ९०० (५२) २५२०१ (५३) ५५० (५५) ३९० (५६) ८१, ६३ (५७) ६२०; ९३० (५८) (ख) १२४ (५९) १५ (६०) २५२ (६१) २ घंटे ४८ मि० (६२) १४००; ११६०० (६३) २ (६४) ३०४११५३४; ३०४११५३० (६५) ८९ (६६) ५४

प्रश्नावली ५

साधारण भिन्न

(२) ३९$\frac{५}{२६}$ (३) २$\frac{५}{८}$ (४) ४$\frac{१}{२}$ (५) $\frac{५}{२}$ (६) १$\frac{९}{१०}$ (७) १ (८) $\frac{३६}{८९}$

(१०) $\cfrac{१}{२+\cfrac{१}{२+\cfrac{१}{२+\cfrac{१}{२+\frac{१}{२}}}}}$ (११) $\cfrac{१}{२+\cfrac{१}{३+\cfrac{१}{१+\frac{१}{४}}}}$

(१३) $१+\cfrac{१}{१+\cfrac{१}{१+\cfrac{१}{२+\cfrac{१}{१+\cfrac{१}{१+\cfrac{१}{१+\frac{१}{२}}}}}}}$

(१४) $\frac{५७}{११८}$ (१५) $\frac{३०}{४३}$ (१६) $\frac{१०५}{२६८}$ (१७) $१\frac{४}{६०१}$ (१९) ५ (२०) २ (२१) $३\frac{७१}{२०३}$ (२३) १, १३ (२४) १,५ (२६) $\frac{२७}{६०}$ (२७) ०·९७०५ (२८) १५ शि० ९ पैं०; ·१५७५ (२९) पहला (३१) ८ (३२) २२ (३४) २१९ (३५) १००० (३७) १५३ (३९) $\frac{१}{२०}$ (४१) ३६४ (४२) $४\frac{३१}{२२८}$ (४३) ० (४४) (१) ६५२८ (२) ४० (४५) १२ पौं० ९ शि० १ पैं० (४६) (१) सबसे बड़ी $\frac{२}{८}$; सबसे छोटी $\frac{१३}{१६०}$ (२) १ (३) $३\frac{१}{६}$ (४७) $\frac{३६}{१२८५६}$ (४८) ३६००

प्रश्नावली ६

दशमलव भिन्न

(१) दूसरी पंक्ति ७; तीसरी पंक्ति ३; चौथी पंक्ति दक्षिण ओर से, ४, १, ९

(२) दूसरी पंक्ति २; तीसरी पंक्ति, १; चौथी पंक्ति १; पांचवीं पंक्ति ७

(३)

१·२४	१·०१	३·७८	६·०३
१·५२	८·५२	·८४	१०·८८
३·९६	१·५८	२·५५	८·०९
६·७२	११·११	७·१७	२५

दूसरी पंक्ति : ५, ४, २ दक्षिण
(४) पहली पंक्ति : २, ० दक्षिण ओर से; पंक्ति : ७, ५ दक्षिण ओर से;
ओर से । (५) पहली पंक्ति : १; दूसरी
तीसरी पंक्ति : ७, २ दक्षिण ओर से ।
(८) −१+·३२ (९) −५+·३८
(७) −१+·७६ (१२) ७५·११८ (१३) १७६
(१०) −१+·२९ (११) ११८९·६२ (१७) ·०००५ (१८) ·०४६५
(१५) ·२६ (१६) ·३००३ (२२) २०$\frac{३}{००}$
(१९) ३·६५३२ (२०) ४४४ (२१) ०·११६३७५ (२६) ·०१६६
(२३) २$\frac{१}{२}\frac{३}{००}$ (२४) ३९०$\frac{४३}{८००}$ (२५) ·०३५
(२७) ३·२५ (२८) ५·७५ (२९) ·२; १·२ (३०) ·०४; ·२ (३१)
·००००१२; ·०३२७६ (३२) ·०००४; २१७८२·५०८ (३३) ·०००५;
१५९७८८७८·५५ (३४) ·१२ (३५) ·७७६२५ (३६) ·१९३०९
(३७) ·९ (३८) ·१२५ (३९) .१२५ (४०) २.८४३ (४१) ४
(४२) १

प्रश्नावली ७
वर्गमूल

(२) २१ (३) ८१ (४) ·४१६ (५) ५७७५ (६) १०८ (७
२०८ (८) १९ (९) ९७ (११) १०८ (१२) ७२९ (१३) १५०

(१४) २०२५ (१५) २०५०१ (१६) १८६००० (१८) १२·३ (१९) ३२·५ (२०) ·१४८ (२१) ·०४५१ (२२) १·००१ (२३) २२२·२२ (२४) १·२६ (२५) ·४७४ (२६) १·७३२० (२८) १/१७३ (२९) २५/३१ (३०) १०५/१०६ (३२) ४ १/२ (३३) १० १/२७ (३४) ६ ३/८ (३५) २ ८८/१२३ (३७) ·९७९८ (३८) ·६१९ (३९) ·४७९ (४१) ·९३५ (४२) ·५०३ (४३) ३·८९४ (४४) ·६३५ (४५) १५.४९११ (४७) १०९ (४८) ५२९००° (४९) ·०४१ (५०) [illegible] (५१) २ ९/२६ (५२) ९ १/४ (५४) ५६ (५५) ४८६ (५७) १३९ (५८) २३ (६०) २ (६१) १५ (६३) ६ (६४) १० (६६) १४४०० (६७) ३६०० (६९) ७५ (७०) ६९ (७१) १९३ (७२) ५४ (७३) ३१ (७५) २०/९, १८ (७६) ४·५, ३·२, २·५ (७७) २·४, १·२५, ३·५ (७८) ·५७७ (८०) नहीं (८१) २५·७१३ (८२) २५·७५ (८३) ३४·१२

प्रश्नावली ८

माध्य

(२) २२ (३) ७ ५/१३ (४) ८·६४ (५) ७८ (६) ४ दिन (७) ५% (८) ४% (९) ६०·२, ६०·१, ६०·२ (१०) ब्राह्मण : २६७, २६५ वैश्य : ३०७, ३०९ (१२) १४ वर्ष (१३) १५४१ (१४) १६·८ वर्ष (१५) १०५ रु० (१७) ३० (१८) १५·८३ (१९) ३४३ रु० (२०) ६३° (२१) २१ ३/४ (२३) १७ रु० (२४) १३ स्टोन २ पौंड (२५) ८ १/२ स्टोन (२६) १५ वर्ष (२८) ४५० रु० (२९) ८०५ रु० (३१) ५४० (३३) ३० (३४) ४२ रु० (३५) ९६० मन (३६) १६६९ (३७) १३५ रु० (३८) ६४८ रु०

प्रश्नावली ९

अनुपात और समानुपात

(२) २ : ३ (३) ९ : १४ (४) ३ : १ (५) १ : ५ (६) ६ : ५ (७) ४ : ५ (९) ७ : १२ बड़ा है (१०) २ १/३ : ३ १/२ बड़ा है (११) समान है (१२) दूसरा बड़ा है (१४) २३१ : ५८५ (१५) ५०४९ : १४४०० (१७) ६२ १/२ (१८) २० (१९) ३० घंटे (२०) ३/१३ १५/१५२ (२२) २५ (२३) १४ (२४) १/४ (२५) ४२ (२६) १२० (२८) २५ (२९) ९ १/३ (३०) $\frac{न^2}{म}$ (३१) ३ (३२) ·१२ (३३) १६६४० (३४) १/१६

(३५) ९ : २५ (३६) १५ : १८ (३७) २१६ : १३३१ (३८) ११ : १२ (४०) २४ : ३० : ३५ (४१) १९२ : २४० : २८० : ३१५ (४२) ४ : ३ (४४) १६ मन १० सेर (४५) ६ आ० (४६) २२ मन (४८) ३० आदमी (४९) ४० दिन (५०) १३ मास (५२) ४० बार (५३) २८१$\frac{१}{४}$ रिम (५४) ७५ (५५) ३$\frac{३}{४}$ दिन (५६) १९$\frac{१}{४}$ औंस (५७) १० घंटे (५८) १९ एकड़ (५९) २७ लड़के (६०) १२५ आदमी (६२) ५० (६४) एक आदमी ७$\frac{१}{१३}$ घंटे; एक लड़का, १८ घंटे; एक आदमी और एक लड़का, ५$\frac{१}{१३}$ घंटे (६५) ४५ दिन (६६) १० घंटे (६७) आदमी, ९ आ० ६$\frac{७८}{१३३}$ पा०; औरत, $\frac{४१५}{१३८४}$ रु०, लड़का, $\frac{१६५०}{४१७२}$ रु० (६८) ६ आदमी

प्रश्नावली १०

समानुपाती भागों में विभाजन

(२) ९० रु०, २१० रु०, ४२० रु० (३) ५५० पौं० ८८० पौं० ९९० पौं० (४) १ मन ५ सेर; १ मन १४ सेर; १ मन ३६ सेर ८ छ० (५) १७७ पौं० १५ शि० ६$\frac{२}{३}$ पेंस; १३३ पौं० ६ शि० ८ पें०; ८८ पौं० १७ शि० ९$\frac{१}{३}$ पें०; ६६ पौं० १३ शि० ४ पें० (६) ६०°, १००°, २०°, (७) १००, १८० (९) ३९ रु० (१०) ५०,००० (१२) १२ हं० ३०$\frac{६}{११}$ पौं०; ३ हं० ३०$\frac{६}{११}$ पौं०, २ हं० ५०$\frac{१०}{११}$ पौं० (१३) १$\frac{१}{४}$ टन (१५) अ, ६६० रु०; ब, ३३० रु०; स, ११० रु० (१६) अ, १ रु० ५ आ० ४ पा०; ब, १३ रु० ५ आ० ४ पा०; स, १४ रु० (१७) ५४० रु०, २७० रु०, १८० रु०, १३५ रु० (१९) २५०० (२०) २१; ४९; ६३ (२१) ५० (२३) अ, ४५ रु०; ब, ४० रु०; स, ५५ रु० (२४) अ, ११४० रु०; ब, ४९३ रु० ५ आ० ४ पा०; स, ४४६ रु० १० आ० ८ पा० (२५) १०३४ रु०; १२९० रु०; १५४८ रु० (२७) आदमी, २७ शि०; औरतें, २७, शि०; बच्चे, ११ शि० ३ पें० (२८) बच्चे, ४२८७ रु० ३ आ० औरतें, ५१४४ रु० १० आ०; आदमी, ५१४४ रु० १० आ० (२९) आदमी, ४ पौं० ४ शि०; औरतें, ३ पौं० ; लड़का, १ पौं० १६ शि० (३०) प्रथम श्रेणी, ११२४४ पौं० १५ शि०; द्वितीय श्रेणी, ४२९३ पौं० ९ शि०; तृतीय श्रेणी, ३८४३६ पौं० १२ शि० (३१) राम, ४ रु० १० आ० ८ पा० लाभ प्राप्त करता है तथा सोहन ८ आ० व मोहन ४ रु० २ आ० ८ पा० हानि उठाते हैं (३३) उसने दूसरे, पाँचवें व छठें प्रश्न पत्र में प्रथम श्रेणी के अंक प्राप्त किये (३४) ७२ रु० आदमियों; ३६ रु० औरतों; ३० रु० लड़कों को (३५) ८० रु० (३६) ५२ पौं० ५२ शि० (३७) ८२४, १२३६, १६४८, २०६०

प्रश्नावली ११
साझा

(२) अ, २८२ पौं०; ब, १६८ पौं०; स, १५० पौं० (३) अ, ३६५ रु० १० आ०; ब ५११ रु० १४ आ०; स, ५८५ रु०; द, ८७७ रु० ८ आ० (४) अ, ३५२ रु०; ब, ४४८ रु०; द, २८८ रु० (५) ३२ रु० (७) अ, ४३$\frac{१}{८}$ रु०; ब, २४$\frac{३}{१०}$ रु०; स, ४०$\frac{१}{२}$ रु० (८) अ, १६६६ रु० १० आ० ८ पा०; ब, ३१११ रु० १ आ० ९$\frac{१}{३}$ पा०; स, २२२२ रु० ३ आ० ६$\frac{२}{३}$ पा० (९) अ, १०८ रु०; ब, ५४ रु०; स, १८ रु० (११) ७५०० पौं० (१२) ब, ३४०० रु०; स, ५०० रु० (१४) ७२ गायें (१५) ६ माह (१६) २ वर्ष (१७) २०००० रु० (१८) ३० दिन (१९) ५२५ रु० (२०) ३२६५ रु० (२१) ३२६$\frac{१६}{१९}$ रु०; ११५$\frac{३}{१९}$ रु० (२२) क, १७०$\frac{२}{३}$ रु०; ख १५३$\frac{३}{८}$ रु०; ग, ५९$\frac{१७}{१८}$ रु० (२३) १५ लालटेन

प्रश्नावली १२
प्रतिशतता

(२) $\frac{१}{२५}$ (३) $\frac{३}{२०}$ (४) $\frac{१}{३०}$ (५) $\frac{१}{२}$ (६) $\frac{९}{८०}$ (७) $\frac{४}{३}$ (८) $\frac{३}{४०}$ (१०) ३०% (११) ८३$\frac{१}{३}$% (१२) ३७५% (१३) ८१$\frac{१०७}{१५३}$% (१४) २$\frac{१}{२}$% (१५) ·०५% (१७) १५ पौं० १५ शि० (१८) १० रु० ८ आ० (१९) २२ पौं० १० शि० (२१) ११ रु० १४ आना (२२) ४० (२३) १०८०० (२४) १ सेर ४ छ० (२५) ५७०००० (२६) ४०९० (२७) अंग्रेजी, ५५% ; गणित, ७०% ; विज्ञान, ६०%; इतिहास, ७०% ; हिन्दी ५०%

नाम	उन्नति	अवनति	प्रतिशत
मद्रास	५१३७		११·६
बम्बई		२८६६	१३·७
उत्तर-प्रदेश	५६१२		११·४

(३०) १२८ (३१) १००० (३३) ५$\frac{१५}{२३}$% (३४) ९६% (३६) २ आ० के १५ अंडे; २ आ० के ९ अंडे (३७) ६$\frac{१}{४}$ पाई (३९) २३$\frac{१}{१३}$%(४०) ३३$\frac{१}{३}$% (४२) ३००(४३) ६२% (४५) ५६० पौं० (४६) ११५५० पौं०; ४५० पौं० (४८) अ, ३२० रु०; ब, ४८० रु०; स, ६४० रु० (४९) ८%; २५% (५०) ५० दिन (५१) २००; ३२८ (५२) ५०० रु०

प्रश्नावली १३

लाभ और हानि

(२) लाभ, ३ पा०; २०% (३) लाभ, ६८ रु० १२ आ०; ४५$\frac{५}{११}$% (४) लाभ, १२ पौं० १० शि०; १५$\frac{५}{८}$%(५) हानि, ७५ रु०; ९$\frac{३}{८}$%(७) ९ शि० ६ पैं० (८) २४६ रु० (९) १ शि० में ५ (११) १६ पौं० (१२) ६ रु० ४ आ० (१३) ५० रु० (१४) १ शि०$\frac{१}{२}$ पैं० (१५) २ आ० ६ पा० (१६) ५% हानि (१७) १५ पौं० १२ शि० ६ पैं० (१८) २५०० रु० (१९) २५% लाभ (२०) ३ आ० ४ पा० (२१) २०% लाभ (२३) १ शि०$\frac{१}{२}$ पैं० (२४) १०६ रु० ४ आ० (२५) ९ शि० २$\frac{१}{२}$ पैं० (२७) ९६० (२८) ९६० (२९) १० के वास्ते १ आ० ९ पा०; ४० दर्जन (३१) ६६६ रु० १० आ० ८ पा० (३२) अ, १०५ पौं० ८ शि० ४ पैं०; ब, १०४ पौं० ७ शि० ३ पैं० (३३) ९८ रु० १३ आ० ३ पा० (३४) १७९ रु० ११ आ० ७ पा० निकटतम (३५) २$\frac{२}{११}$% (३७) ६३$\frac{७}{११}$% (३८) ३३$\frac{१}{३}$% (३९) २०% (४०) १ रु० ८ आ० (४२) २०% (४३) ११$\frac{१}{९}$% (४४) १००% (४६) ८०% (४७) १४$\frac{२}{७}$% (४९) १२५ रु० (५०) १६$\frac{१}{१७}$% (५२) २६$\frac{६}{११}$% (५४) ४४% (५५) ६$\frac{२}{३}$% (५६) १$\frac{३}{१७}$ पौं० (५७) १२% (५९) २६ रु० १० आ० ८ पा० (६०) ७५ पौं० (६१) १० आ० (६३) २०० रु० (६४) ८० रु० (६६) १५ पौं० ६ शि० ८ पैं० (६७) १०५० रु० (६८) १२०० रु० (७०) चिकोरी, २ शि०; चाय, १ शि० प्रति पौं० (७१) ५०० रु०; ४०० रु० (७२) ६०० पौं०; ७५० पौं० (७३) ३५०० रु०; ३००० रु० (७५) १० रु०; १० रु० (७६) ६० रु० (७७) १७% (७८) १४ शि० ८ पैं०; ६०% (७९) २१%

प्रश्नावली १४
सरल ब्याज

(२) १६० रु० (३) १७ पौं० १४ शि० ६ पें० (४) २७३ पौं० ४शि० ६ पें० (५) ७६२ रु० (६) १०५ रु० ७ आ० ६ पा० (७) २ शि० ४ पें० (९) ७७ रु० ९ आ० ७·२ पा० (१०) ३८ पौं० १५ शि० $\frac{३}{७}$ पें० (११) १८ पौं० १५ शि० (१२) ५ पौं० १९ शि० ८$\frac{२}{१३}$ पें (१४) ४०६ पौं० ४ शि० २ पें० (१५) २३५ रु० १५ आ० २$\frac{२}{१३}$ पा० (१६) ४९९४ रु० १३ आ० ४ पा० (१७) ६३१ पौं० १८ शि० ६ पें० (१९) ३१७० रु० १० आ० (२०) २४००० रु० (२१) कोई धन (२२) १७७८ पौं० (२३) ५७० रु० (२४) ८००० रु० (२६) ४$\frac{५}{६}$% (२७) ५% (२८) ८% (२९) ७$\frac{१}{२}$% (३०) ३$\frac{१}{३}$% (३२) ३० वर्ष (३३) १६ सितम्बर (३४) (अ) ४४ रु० (ब) २५६७ रु० ११ आ० ४ पा० (स) ८% (द) ६०० रु० (क) ३३$\frac{१}{३}$ वर्ष (ख) २१ पौं० १७ शि० ३ पें० (ग) १०२० पौं० (घ) १२०० रु० (च) २६$\frac{२}{३}$ वर्ष (छ) ३% (३५) ९जनवरी (३७) २२५ रु० (३८) ३१५ पौं० १० शि० ८ पें०; २$\frac{१}{२}$ वर्ष (३९) १६५५ रु० २ आ० ९$\frac{३}{२५}$ पा० (४०) ५% (४१) ३० वर्ष (४२) १२$\frac{४}{१३}$% (४३) ५४० पौं०; ३$\frac{१}{३}$% (४४) ४९० रु०; १४$\frac{२}{७}$% (४६) ५%; अ, १२५ पौं०; ब, ७५ पौं०; स, ८२ पौं० (४७) ४% (४८) १$\frac{२}{३}$ वर्ष (५०) ११२५ रु० ३$\frac{१}{२}$% पर; ८७५ रु० ४$\frac{१}{२}$% पर (५१) १०० पौं० ५% पर; १५० पौं० ६% पर (५३) २०० पौं०; १५० पौं० (५४) १७० रु०; १३० रु० (५६) १५०० पौं० (५७) ६०० रु० (५९) ५०० पौं० ; ३% (६०) ७$\frac{१}{२}$% (६२) ५०० रु० (६३) २०० रु० (६५) १०१२० रु०; ९६६० रु०; ९२४० रु० (६६) ६३० रु०; ५८५ रु०; ५४६ रु० (६७) १६ वर्ष

प्रश्नावली १५
चक्रवृद्धि ब्याज

(२) ५१ रु० (३) ४१ रु० (४) २१ रु० (५) ८२ रु० (६) ३३१ रु० (७) ६७१ रु० (८) १०२ रु० (९) १६४ रु० (१०) १२६१ रु० (११) ४४१० रु०; ४१० रु० (१२) ४०८ रु०

प्रश्नावली १६

चक्रवृद्धि ब्याज

(२) १०२ रु० ८ आ० (३) ४०८ रु० (४) ६०९ पौं० (५) १३२४ रु० (६) २६७ पौं० १९ शि० ३ पें० (७) ८२ रु० (८) १९५१ पौं० (९) १०७७ रु० ८ आ० ६ पा० (१०) ५९६९ पौं० ५ शि०

प्रश्नावली १७

मिश्रधन

(२) ६७६ रु० (३) ४९६ रु० २ आ० (४) १६०२ पौं० १८ शि० ७ पें० (५) ५२६६ रु० ६ आ० ७ पा० (६) ३०७ रु० १ आ० (७) ८१० रु० ५ आ० ५ पा० (८) ४०२ रु० ५ आ० ८ पा० (९) १४९ पौं० १६ शि० ३ पें० (१०) ३०५ पौं० ६ शि० १ पें० (११) ४८४०० (१२) ३७०४४ (१३) ३३१० रु० २ आ० (१४) १३६३ रु० ८ आ० ३ पा० (१६) ११३ पौं० १$\frac{१}{२}$ पें० (१७) ३४४७६ रु० (१८) ८४६५ पौं० १ शि० ४ पें० (१९) ५७४६ रु० (२०) ५६३ पौं० ८ शि०

प्रश्नावली १८

चक्रवृद्धि ब्याज

(२) ४७ रु० १२ आ० १ पा० (३) ४६ रु० १ आ० २ पा० (४) ९७ रु० १४ आ० लगभग (५) ५ रु० ७ आ० (६) ३८ रु० ७ आ० २ पा० (७) ७१ रु० १२ आ० (८) २५ रु० १२ आ० १ पा० (लगभग) (९) ६१२$\frac{३}{६८}$ रु० (१०) १२६१ रु० (११) ५२०२ रु० (१२) ५० रु० १५ आ० २ पा० (१३) ४५ पौं० ५ शि० $\frac{३}{४}$ पें० (१४) ९१८० पौं० १८ शि० (१५) १०२५ पौं० ४ शि० ८ पें०।

प्रश्नावली १९

मूलधन

(२) ८०० रु० (३) ६९९ पौं० १४ शि० २ पें० (४) २७००० रु० (५) १०००० पौं० (६) ८२३ रु० लगभग (७) १०००० रु० (८) १०००० रु०

(९) ३१३६०; २६१३३ (१०) १६६६ रु० १० आ० ८ पा० (१२) २०० रु० (१३) ४००० रु० (१४) ६४० रु० (१५) ३१५ रु० (१६) ५६ पौं० ५ शि०

प्रश्नावली २०

अन्तर

(२) ७४ रु० ६ आ० ११ पा० लगभग (३) ६१ रु० ४ आ० (४) ६० पौं० १० शि० ८ पें० (५) ११ पौं० १ शि० ५ पें० (७) ६००० रु० (८) ८३३ पौं० ६ शि० ८ पें० (९) ४०० रु० (१०) ३७५० पौं० (११) ३३७५ रु० (१२) ८००० रु० (१३) १५६२५ पौं० (१५) ४% ; १६२७ रु० ११ आ० ४ पा० (१६) ४% ; ६२५ पौं० (१७) १६० रु० १२ आ० ६ पा० (१८) ५%; १३३ पौं० ६ शि० ८ पें० (१९) ४% ; ११५३१ रु० ४ आ० (२०) १२५० रु०; ४%

प्रश्नावली २१

चक्रवृद्धि ब्याज पर कुछ कठिन प्रश्न

(२) ८५१८४ (३) २१४४१५ (५) १२१९३ पौं० १५ शि० (६) १६४० रु० (७) १३०७२ रु० (८) ५६५ रु० १२ आ० (१०) ४४१० रु० (११) ४३९४ रु० (१२) ४५६९७६ रु० (१३) १००० पौं० (१५) २०२८ रु० (१६) २२०५ रु०, २१०० रु०, २००० रु० (१७) कुमार, ६५०० रु०, ७०३० रु० ६ आ० ४$\frac{4}{5}$ पा०; प्रदीप, ६२५० रु, ७०३० रु० ६ आ० ४$\frac{4}{5}$ पा० (१८) ४००० पौं० (१९) १२००० पौं० (२०) ६७६५२०१० (२१) १९४००० पौं०, ६·४ प्रति सैकड़ा (२३) ५००० रु० (२४) ६००० रु० (२५) ५०० पौं०; ४% (२६) १६४० रु० (२७) ७१६ रु० ७ आ० ९ पा० निकटतम

प्रश्नावली २२

आयतों का क्षेफलत्र

(२) ४३३ व० ग० ३ व० फु० (३) ४ व० फु० ९१ व० इं० (४) १८ व० ग० ५ व० फु० ८२ व० इं० (५) १३६ व० जरीब ६८०० व० कड़ी (६) $\frac{(३अ+ब)स}{९}$ व० ग० (८) ४ ग० (९) ७ फु० ४ इं० (१०) १७$\frac{3}{5}$ फु० (११) ६६ ग० (१३) १·७५ सें०मी० (१४) ९ग० २ इं० (१५) ३६३ फु०

(१६) २३ जरीब ४५ कड़ी (१८) २६६ व० ग० ७ व० फु० (१९) १५६ पौं० ५ शि० (२०) १४ रु० (२१) १ व० ग० ८ व० फु० ५२ व० इं० (२२) ३ व० फु० ५४ व० इं० (२३) १ व० फु० ६४ व० इं० (२४) १' ५" (२५) ५'३" (२६) ७५ व० ग० १ व० फु० (२७) ३·३"; ३·३" (२८) ६·६ गज (३०) ३६७२ (३१) १ फु० ३ इं० (३२) ९५७६ (३४) ७० फु०, ५० फु०; ६२५ व० फु० (३५) ४५३ पौं० १२ शि० (३६) १४० व० ग०; ४ रु० १ आ० (३७) ५५६ व० ग० (३९) २६८ रु० ८ आ० (४०) ७८ व० ग० (४१) ७०५ रु० (४२) ४८ वर्ग फुट; ३२ वर्ग फुट (४३) १३२ वर्ग इंच (४४) १५६ वर्ग इंच (४५) १५० वर्ग इंच (४६) २८८ वर्ग इंच (४८) ३०४ एकड़ ९ वर्ग गज (४९) १३ गज (५०) ६४ वर्ग गज (५२) ११० गज; ४४ गज (५३) २२ फुट; १० फुट (५४) २७ फुट; २१ फुट (५६) १०८ गज (५७) २८ गज १ फुट (५८) ४० $\frac{७}{८}$ गज (६१) ८७ वर्ग गज ५ वर्ग फुट (६२) ५ वर्ग गज २ वर्ग फुट ९६ वर्ग इंच (६३) १५० वर्ग गज ७ वर्ग फुट (६५) १० फुट (६६) १० फुट (६७) ३ फुट (६९) ५७ रु० १२ आ० (७०) ४२ रु० १० आ० (७१) ३७२ फु० $१\frac{३९}{६०}$ इं० (७२) २७ पौं० $२\frac{१}{४}$ पें० (७४) १८ फु० (७५) १८ फु०, १२ फु०, १० फु० (७६) ४५ फु०, ३० फु० (७७) १० फु० (७९) ५ शि० २ पें० (८०) $३९\frac{७}{१२}$ वर्ग फु० (८१) १२० वर्ग फुट (८२) ४ वर्ग फुट १३३ वर्ग इंच (८३) २९९ (८४) ३६ वर्ग फुट (८५) ३४·५ वर्ग फुट (८६) २८ रु० २ आ०; ३१ रु० ४ आ० (८७) ११८८ वर्ग फुट (८८) २१ गज; ७ गज; $२\frac{१}{२}$ गज

प्रश्नावली २३

त्रिभुज

(२) ९९ वर्ग फु० (३) २२० वर्ग इंच (४) ७० वर्ग फुट (६) १५० वर्ग सें०मी० (७) ३३ वर्ग फुट (८) ४८ वर्ग गज ८ वर्ग फुट (९) १२ वर्ग फुट ६ वर्ग इंच (१०) ४ वर्ग गज २ वर्ग फुट १३८ वर्ग इंच (१२) १४०·२९२ वर्ग फुट (१३) ६ वर्ग गज ५ वर्ग फुट ११२·४७३ वर्ग इंच (१४) २७·०६ एकड़ (१६) २४ वर्ग इं० (१७) २७० वर्ग फुट (१८) ७८० वर्ग गज (१९) ३१·३०५ वर्ग इंच (२०) ७८२·६ वर्ग सें०मी० (२१) ८४ रु० ४ आ० $९\frac{३५}{२८}$ पा०

(२२) ४५०० वर्ग फुट (२३) ११३४ वर्ग गज (२५) ४० इंच (२६) ११ गज २ फुट ८ इंच (२७) १६ गज (२८) ४ फुट (२९) १५·४ जरीब (३०) २·४ सें० मी० (३२) ५·८८५ गज (३३) ३१७·२ फुट (३४) ६·९२८ फुट (३५) १२८९ गज

प्रश्नावली २४

समांतर चतुर्भुज

(२) २५० वर्ग फुट (३) ४ वर्ग गज ८ वर्ग फुट (४) ६१·१०५ वर्ग जरीब (६) १ गज २ फुट (७) ०·२६३१ जरीब (९) २/३ जरीब (१०) १६०० जरीब (१२) १५ वर्ग फुट (१३) १५६·२५ वर्ग जरीब (१४) ५ गज (१६) ३४५६ वर्ग इंच; ६० इंच; ५७·६ इंच (१७) २४ वर्ग गज; ५ गज; ४·८ गज (१८) १३० सें० मी०; ९३६० वर्ग सें० मी०; ९६·४९ सें० मी० (१९) ८६४ वर्ग गज

प्रश्नावली २५

चतुर्भुज

(२) २१३०० वर्ग फुट (३) ७·२१७२१ एकड़ (४) ७ वर्ग फुट (६) ४० फुट (७) ६० गज (८) ७८ कड़ी (१०) १० फुट; १५ फुट (११) १०० गज; ६० गज (१२) २५ गज; १४ गज (१४) ७८ वर्ग फुट (१५) १६१ वर्ग गज ६ वर्ग फुट ७२ वर्ग इंच (१६) ५५·८१५ वर्ग जरीब (१८) ७५० वर्ग गज (१९) ८०० वर्ग जरीब (२०) १७६४ वर्ग फुट (२१) ३०६ वर्ग फुट

प्रश्नावली २६

समलम्ब

(२) २१६ वर्ग गज (३) ५ वर्ग गज (५) ८० फुट (६) १५ जरीब (८) २१ इंच; ९ इंच (९) १३० फुट; ७८ फुट (१०) २३ फुट; ३७ फुट (१२) २६४ वर्ग गज (१३) १२२९·८ वर्ग गज (१४) ८८५ वर्ग फुट ४८ वर्ग इंच (१५) २६ फुट ८ इंच (१६) ३ १/५ फुट, ४ ४/५ फुट; या ४/५ फुट, १ ३/५ फुट

प्रश्नावली २७

वृत्त

(२) १३२ फुट (३) ११ इंच (४) २४१३७ १/७ मील (५) १६५०० गज (६) ९ बार (७) ८८ रु० (८) ७० गज २ फुट १ ५/७ इंच (१०) २१ गज २ फुट ४ इंच (११) २३ गज १ फुट (१२) १ गज ६ इंच (१३) २२ गज ६ इंच (१४) २१७९ मील ४ फर्लांग ८० गज (१५) ३१ १/२ इंच (१६) ७ फुट (१८) ६८ वर्ग गज ४ वर्ग फुट (१९) ४ वर्ग फुट ४० वर्ग इंच (२०) २० वर्ग गज १०६ वर्ग इंच (२१) ३८·५ वर्ग फुट (२२) ३८ १/२ वर्ग इंच; १० १/२ वर्ग इंच (२३) ३८ ३/७ वर्ग फुट (२५) १५४ वर्ग फुट (२६) २फुट (२७) १४ फुट (२८) ५५ इंच (३०) १४ गज (३१) ५१·८४ फुट (३२) १४ फुट (३३) २·९ इंच (३४) १८९ (३५) २४६ वर्ग इंच (३६) ४०; २१ ३/७% (३७) १५ आ० २ ३/७ पा० (३८) १४४ इंच; ४४ इं०

प्रश्नावली २८

फील्ड-बुक

(२) ४८००० वर्ग कड़ी (३) ३५१५० वर्ग कड़ी (४) ८ २३/४४ एकड़ (५) २९०० वर्ग कड़ी (६) २५००० वर्ग जरीब (७) २३१०० वर्ग कड़ी (९) १·०५८ एकड़ (१०) ·६६२ एकड़ (१२) ·६२ एकड़ (१३) १·५२ एकड़ लगभग (१४) २.०५ एकड़ (१५) २ एकड़ १ रूड २४ पोल

प्रश्नावली २९

आयतन

(२) ११२० घन इंच (३) ५ घन गज ५ घन फुट (४) ३३६ घन इंच, (५) २ ७/८ गैलन (७) १५ फुट ६ इंच (८) १६८ वर्ग फुट (९) ८३ घन गज २२ घन फुट (१०) १६ सें० मी० (११) २ फुट (१२) १ १/२ गज (१३) ६ सें० मी० (१४) ९·६ वर्ग मीटर (१५) ८१ घन फुट (१७) १०५६ (१८) ३८४ (१९) ४८ (२१) ९ ३/८ इंच (२२) २ इंच (२३) १८००० घन फुट

(२५) ३० रु० १.५ आ० (२६) ६६० घन इंच (२७) ८१९ घन इंच; सामान, ३०१ घन इंच (२९) १८० टुकड़े (३०) १७२८०० (३२) ४५ फुट प्रति मिनट (३३) ४५ मिनट (३४) १ गज (३५) ५ पौंड १२ औंस

प्रश्नावली ३०

बेलन

(२) ३५२ वर्ग इंच (३) ७९२ वर्ग इंच (४) ७३$\frac{१}{३}$ वर्ग फुट (५) ६६ पौं० (६) १७६० वर्ग गज (८) १३२० घन सें० मी० (९) ५१ घन फुट ५७६ घन इंच (१०) ३ घन फुट ३६० घन इंच (१२) १६ फुट (१३) १३ फुट (१४) १९$\frac{१}{४}$ मीटर (१५) ५$\frac{१}{४}$ फुट (१६) ०·७५ इंच (१८) ११९८० घन इंच (१९) ६ घन फुट १६०० घन इंच

प्रश्नावली ३१

शंकु

(२) ४४ वर्ग गज; ६१ वर्ग गज १ वर्ग फुट (३) ८८० वर्ग इंच; १०३४ वर्ग इंच (४) २०४$\frac{२}{७}$ वर्ग फुट; २८२$\frac{६}{७}$ वर्ग फुट (५) ५५० वर्ग इंच; ७०४ वर्ग इंच (६) २४३·३५ वर्ग फुट (८) १२३२ घन इंच (९) १०६ घन फुट १६३२ घन इंच (१०) ९४$\frac{२}{७}$ घन सें० मी० (१२) ५ फुट १० इंच (१३) ३० इंच (१४) ७ फु० (१५) २८ फुट; ९ फुट (१६) ६३·३८ घन फुट (१७) ३७ रु० २ आ० (१८) ८९$\frac{५}{७}$ घन इंच (१९) ०·०१३ घन इंच लगभग (२०) १०० मिनट

प्रश्नावली ३२

गोला

(२) २४६४ वर्ग इंच (३) ३८·५ वर्ग फुट (४) ४ रु० १३ आ० (५) ११ पौं० ११ शि० (७) १७९$\frac{२}{३}$ घन फुट (८) ३८·८०८ घन इंच (९) १७२८ (१०) ३८१$\frac{१}{३}$ घन इंच (११) ८४० (१३) ३ फुट ६ इंच

(१४) २१ सें० मी० (१५) २१ फुट (१६) १·४ इंच (१७) २·५ सें० मी० (१८) १८ इं० (१९) १$\frac{१}{४}$ इंच

प्रश्नावली ३३

उपयोगी क्रियाएँ

(२) ५०,६० (३) २०० रु०; ३०० रु०; ४०० रु० (५) ७०० रु० (७) १० दिन (८) २२ दिन (९) ११ बार (११) ६० रु० (१२) ८० रु०, ४० रु० (१४) १४; १ रु० २ आ० (१५) ३$\frac{१}{२}$ मील (१६) २०० रु०; ९० (१८) ७० लड़के; ४० लड़कियाँ (१९) १० (२१) ४६ रु० ८ आ० (२२) ३० रु० (२३) ६९० पौं; १२०$^{\circ}$ (२५) १७ शि० ७ पें० १ फार्दिंग (२७) १८० सेर; ३६० सेर; ५४० सेर (२८) १$\frac{१}{२}$ मन; ८ आ० प्रति मन (३०) ३ आ० ४ पा०; ५ आ० ४ पा० (३२) २०० (३३) ६० पौं० (३५) कुत्ता ७२० तथा खरगोश ९०० (३६) १८० हाथ।

प्रश्नावली ३४

लेखा-चित्र

(५) (अ) चीता, ६५ (ब) आदमी, १५ (६) (अ) ८$\frac{१}{२}$", ४$\frac{१}{२}$" (ब) जून, जनवरी, फरवरी

प्रश्नावली ३५

सांख्यिकाओं के लेखा-चित्र

(१) ३·६५ लाख, १९३६ में (२) ४$\frac{१}{२}$ मील, ३$\frac{१}{२}$ मील (४) ६०°, ४६$\frac{१}{२}$° (५) १३२·५ पौं०; १५० पौं० (६) ६$\frac{३}{४}$" (७) ८२ फुट (९) १५·१ करोड़: १८७६ (१०) जून मास के मध्य सूर्य सबसे अधिक देर से अस्त होता है, और शीघ्र अति शीघ्र दिसम्बर के मध्य। (११) ५२·१° (१२) (i) १८० पौ०; (ii) २३ (१३) ४५७; ८४०; २४५७ (१५) १८२८ और १८४५; १८५८

दोहराने के लिये पर्चे

१

(१) (क) ८$\frac{६}{९}$; (ख) १३·२७९ (२) (क) ६४ बार; (ख) १·२७४ (३) (क) ५$\frac{५}{६}$%; (ख) २५०० (४) (क) ५:३; (ख) १९६१ रु० ८ आ० ६ पा० (५) २५० रु०; ४% (६) क, २६० रु०; ख, १०० रु०; ग, २० रु० (७) ६ इंच।

२

(१) (क) १ (ख) ७·८ (२) (क) $\frac{१}{२८}$; (ख) २९४११ रु० १२ आ० ३ पा० (३) (क) १३ वर्ष ५ मास; (ख) ३७०६ (४) (क) चाय ५ शि० प्रति पौंड; शक्कर प्रति पौंड ४ पें० (ख) ६२५० पौं० (५) २७६ पौं० (६) १८७$\frac{१}{२}$ मील (७) २२ गज, १० गज।

३

(१) (क) १ (ख) ·००४६ (२) (क) ७९९९ रु० १५ आ० ९ $\frac{१५}{१६}$ पा० (ख) ९५२०० (३) (क) ३ रु० ८ आ० प्रति मन (ख) ·१६ (४) (क) ९$\frac{१}{११}$% (ख) ६४० पौं० (५) ६२५ रु०

४

(१) (क) $\frac{४१}{१३६}$; (ख) ३·०२४०२५ (२) (क) ·३५ (ख) १०·९५ घंटे (३) (क) ४% (ख) २०·७३६ रु० (४) (क) ७; १ (ख) १०% (५) ३$\frac{१}{१०}$ मील (६) पहली (७) ५ घन फुट ९६ घन इंच

५

(१) (क) १ (ख) ·१ (२) (क) १० शि०; (ख) ४८०; ६०० दिन (३) (क) ५ शि० ३ पें० प्रति एकड़; ७२० एकड़; (ख) ४०००० रु० (४) (क) ३७८० रु० (ख) ६$\frac{१}{२}$ वर्ष (५) (क) १२ आ० (ख) ३१५ पौं० (६) ११३; ३३६; ६७८; ७९१

६

(१) ४$\frac{४}{५}$ (२) (अ) ·४०८; (ब) १·४१४२ (३) ७२ पौं० ६ शि० ८ पें० (४) (अ) ३ पौं० (ब) १२$\frac{४}{५}$% (५) (अ) १५, ७, १० गैलन (ब) ७३६ रु०

७

(१) (अ) ३; (ब) ७२ (२) (अ) १६ (ब) १९५ पौं० ६ शि० ३ पें० (३) (अ) ३०००; (ब) १४ छटाँक (४) (अ) ३८४ रु० (ब) ३०४० रु० (५) ११:१७; (६) ७३ रु० १४ आ० ४$\frac{४}{६}$ पा०

८

(१) (क) १ (ख) ११८४००; १००८०० (२) (क) १००० रु०, १३०० रु०, १६१० रु० (३) (क) १५ (ख) २५० पौं० (४) (क) ४६० पौं० (ख) ४६ रु० १० आ० ८ पा० (५) ५%; २५० रु०; (६) २ मी० प्र० घं०; ४ मी० प्र० घं०

९

(१) (क) ४$\frac{१}{३}\frac{१३}{१००}\frac{१}{३}$; (ख) ४००; ५०, ६, $\frac{६}{१०}$, $\frac{५}{१००}$, $\frac{४}{१०००}$ (२) (क) $\frac{३१५}{१३११२}$; (ख) ८ घंटे (३) (क) १६·८ वर्ष; (ख) २४० (४) (क) ६$\frac{२}{३}$% लाभ; (ख) २४००, १८००, १६००, १५००, (६) ३९

१०

(१) (क) $\frac{१७८}{११७३२}$ (ख) २११७ (२) (क) ६०१५; ·०१२ (ख) ४४४१ पौं० १६ शि० ४ पें० (३) (क) ३० पौं०; (ख) ५ शि०; ३ शि०; २ शि० (४) १०१६ पौं० २ शि० ११ पें०; ११४२ पौं० ८ शि० ९$\frac{३}{५}$ पें० (५) क के चलने के स्थान से ६६$\frac{२}{३}$ गज; क, अपने चलने के स्थान को ३ बार और ख दो बार पार करेगा।

उ० प्र० हाई स्कूल परीक्षा

सन् १९५२

(१) (क) १४१ (ख) ६ (२) (क) ९२४ (ख) ४६२$\frac{२}{३}$ (३) (क) ४० (ख) १५० रु० (४) (क) क, २६२ रु० ८ आ०; ख, १८७ रु० ८ आ०; ग, ४५० रु० (ख) ५२$\frac{१}{२}$ दिन (५) ५२५ रु० (६) (क) १४$\frac{१}{७}$ घन इंच (ख) १२ मी० प्रति घन्टा (७) (क) ४४$\frac{४}{९}$ फुट (ख) क्रमशः १५ रु०, १० रु०, ५ रु० (८) १२५०० वर्ग गज (९) ८ शि० ४ पें० (१०) ८$\frac{६}{४६}$ वर्ष (११) (क) ३ मील प्रति घंटा (ख) ३६०० (१२) $\frac{१}{३}$ सेर (१३) ६४० रु०; ३६० रु० (१४) ६९ करोड़ रु०

सन् १९५३

(१) (क) ५ (ख) ३३ रु० १२ आ० (२) (क) ५·०६ (ख) ३० रु० (३) (क) ६०० रु० आय, ४८० रु० खर्च (ख) २४८ रु०; ३७२ रु०, ४९६ रु०, ६२० रु० (४) ५% लाभ (५) २५० रु० (६) (क) ७७० घन फुट (ख) ३६० चक्कर (७) (क) ३९१ (ख) २०० (८) २०० रु०, १६० रु०, १२० रु० (९) ११८८ वर्ग फुट (१०) १००° (११) (क) ६४ (ख) १२$\frac{१}{२}$% (१२) २० आदमी (१३) ३ वर्ष ५ वर्ष, (१४) २१

सन् १९५४

(१) (क) ७५६ (ख) $\frac{१}{२}$ (२) (क) १२.३५ (ख) १०८०० रु० (३) (क) १८०५, २५२७, ३२४९ (ख) ११$\frac{४}{५}$ (४) ६६० रु०, १६$\frac{२}{३}$ प्रतिशत (५) ४$\frac{१}{६}$ प्रतिशत (६) (क) १७९$\frac{२}{३}$ घ० इं० (ख) ६० चक्कर (७) २५० रु० (८) १०४६०० वर्गगज (९) ४ दिन (१०) १$\frac{१}{२}$ वर्ष (११) (क) ३०० रु० (ख) १३ फुट ६ इं० (१३) २२$\frac{६}{९१}$ प्रतिशत (१४) १५

सन् १९५५

(१) (क) ११·३६ (ख) १२ वर्ष (२) (क) १ (ख) २५०० रु० (३) (क) ३९ (ख) १२५ रु०; १५६ रु० ४ आ०; २१८ रु० १२ आ० (४) (क) ३५०; ५००; ६५० (ख) २ रु० १३ आ० प्रति टोकरी (५) (क) ४० रु० (ख) ६ वर्ष (६) (क) २११ रु० १२, आ० (ख) १३३ रु० (७) (क) ११७$\frac{१}{३}$ घन फुट (ख) ९$\frac{१३}{२३}$ फुट (८) ४५ वर्ग मील, ५५ वर्ग मील (९) ६६७५० वर्ग गज (१०) ४७५ बीघे

सन् १९५६

(१) ७·७४ (२) (क) १२६ (ख) २३ (३) (क) १६१०५१ (ख) ११५ (४) ८$\frac{१}{३}$% (५) ४%; १३५ पौं० ८ शि० ४ पैं० (६) ७९०० वर्ग गज (७) ३ इञ्च (८) (क) १२० वर्ग फुट (ख) ३०० चक्कर (९) क के हाथ १०.५ रु० घाटा (११) (क) २ रु० ८ आ० १० पा० (ख) ३$\frac{३}{४}$%

परिशिष्ट (क)

माप

धन के माप

१२ पाई	= १ आना
१६ आ०	= १ रु०

रु० आ० पा०

४ फार्दिंग	= १ पैनी (पेंस)
१२ पेंस	= १ शिलिंग
२० शिलिंग	= १ पौं०

पौं० शि० पें० फा०

१ फ्लोरिन	= २ शिलिंग
१ अर्द्ध-क्राउन	= २ शिलिंग ६ पेंस
१ क्राउन	= ५ शिलिंग
१ सावरन या पौंड	= २० शिलिंग
१ गिनी	= २१ शिलिंग

भारतीय भार के माप

४ धान	= १ रत्ती
८ रत्ती	= १ माशा
१२ माशा	= १ तोला
५ तोले	= १ छटाँक
१६ छटाँक	= १ सेर
४० सेर	= १ मन

मन सेर छटाँक तोला माशा रत्ती

टिप्पणी :—एक रुपये का भार एक तोला होता है और १ सेर में ८० तोले होते हैं।

१ तोला	= १८ ग्रेन (ट्राय)
१ मन	= १०० पौंड (ट्राय) = ८२$\frac{2}{7}$ पौंड (अवौया)

ट्राय तौल

सोने, चाँदी तथा जवाहिरात तोलने के लिये।

२४ ग्रेन	= १ पैनीवेट
२० पैनीवेट	= १ औंस
१२ औंस	= १ पौंड

एवरडुप्वाइज तौल

प्रायः सभी वस्तुएँ तोलने के लिए।

१६ ड्राम	= १ औंस
१६ औंस	= १ पौंड
२८ पौंड	= १ क्वार्टर
४ क्वार्टर	= १ हंडरवेट
२० हंडरवेट	= १ टन = २७$\frac{1}{2}$ मन
१ स्टोन	= १४ पौंड

टन हंडरवेट क्वार्टर पौंड औंस

लम्बाई के माप

१२ इंच (१२")	= १ फुट (१')
३ फुट (३')	= १ गज
५$\frac{1}{2}$ गज	= १ पोल या रूड
४० पोल	= १ फर्लाङ्ग

८ फर्लाङ्ग या १७६० गज = १ मील
२२ गज या १०० कड़ी = १ जरीब

मील फर्लाङ्ग गज फुट इञ्च

क्षेत्रफल के माप

१४४	वर्ग इंच	=	१ वर्ग फुट
९	वर्ग फुट	=	१ वर्ग गज
३०$\frac{१}{४}$	वर्ग गज	=	१ वर्ग पोल
४०	वर्ग पोल	=	१ वर्ग रूड
४	वर्ग रूड या ४८४० वर्ग गज	=	१ एकड़
६४०	एकड़	=	१ वर्गमील
१००००	वर्ग कड़ी	=	१ वर्ग जरीब
१०	वर्ग जरीब	=	१ एकड़

एकड़ रूड पोल गज फुट इञ्च

आयतन के माप

१२×१२×१२ या १७२८ घन इञ्च = १ घनफुट
३×३×३ या २७ घन फुट = १ घन गज

भारतीय माप

८ गिरह	=	१ हाथ
२ हाथ	=	१ गज
२$\frac{१}{२}$ गज	=	१ लट्ठा

भारतीय क्षेत्रफल के माप

२० कचवांसी	=	१ बिस्वांसी
२० बिस्वांसी	=	१ बिस्वा

२० बिस्वे	=	१ बीघा
१ बीघा	=	५५ × ५५ वर्ग गज = ३०२५ वर्ग गज
	=	५/८ एकड़

आयतन के माप

६० सेकंड	=	१ मिनट
६० मिनट	=	१ घंटा
२४ घंटे	=	१ दिन
७ दिन	=	१ सप्ताह
४ सप्ताह	=	१ मास
१२ मास	=	१ वर्ष
३६५ दिन	=	१ साधारण वर्ष
३६६ दिन	=	१ लीप ईयर (लौंद का वर्ष)
१०० वर्ष	=	१ शताब्दी

टिप्पणी—(अ) प्रत्येक ४ से विभाजित होने वाला सन् लौंद का वर्ष होता है।

(ब) शताब्दी के वर्ष साधारण वर्ष होते हैं किन्तु ४०० से भाग हो जाने वाली शताब्दी का वर्ष लौंद का वर्ष होता है।

प्रत्येक दिन रात्रि के १२ बजे के बाद से आरम्भ होता है और ५२ सप्ताह का १ वर्ष होता है।

वर्ष मास दिन घंटे मिनट सेकन्ड

कोण के माप

६० सेकन्ड (६०″)	=	१ मिनट (१′)
६० मिनट (६०′)	=	१ अंश (१°)
९० अंश (९०°)	=	१ समकोण

समकोण अंश मिनट सेकन्ड

परिशिष्ट (ख)

गुणन व भाग की विशेष विधियाँ

१. किसी संख्या को गुणा करने के लिए---

(क) ५ से, उसके दक्षिण ओर एक शून्य बढ़ाकर २ से भाग दो।

(ख) २५ से, उसकी दक्षिण ओर दो शून्य बढ़ाकर ४ से भाग दो।

(ग) १२५ से, दक्षिण ओर ३ शून्य बढ़ाकर ८ से भाग दो।

(घ) ६२५ से, दक्षिण ओर चार शून्य बढ़ाकर १६ से भाग दो।

२. किसी संख्या का भाग करने के लिए—

(क) ५ से, उसको २ से गुणा करके १० से भाग दो।

(ख) २५ से, उसको ४ से गुणा करके १०० से भाग दो।

(ग) १२५ से, उसको ८ से गुणा करके १००० से भाग दो।

(घ) ६२५ से, १६ से गुणा करके १०,००० से भाग दो।

३. किसी संख्या को ९,९९,९९९,९९९९ आदि से गुणा करने के लिए—
गुण्य के दक्षिण ओर इतने शून्य बढ़ाओ जितने कि गुणक में ९ के अंक हैं और फिर उसमें से गुण्य को घटा दो। शेष अभीष्ट गुणनफल होगा।

४. किसी संख्या को ९,९९,९९९,९९९९ आदि से भाग करने के लिए अथवा ९८,९९८ व ९७,९९७ से भाग देने के लिए---

(क) खड़ी रेखा खींचकर दक्षिण ओर से उतने अंक पृथक कर दो जितने कि भाजक में ९ के अङ्कों की संख्या है।

(ख) रेखा के बाँईं ओर के अङ्क रखकर दक्षिण की ओर से उतने ही अङ्क काट दो जितने कि भाजक में ९ के अङ्कों की संख्या है।

(ग) इसी क्रिया को जब कि वह भाज्य के अङ्कों के अनुसार सम्भव हो करते रहो।

(घ) सब पंक्तियों को जोड़ लो। खड़ी रेखा के दक्षिण की ओर के अङ्कों का योगफल, शेष और बाँईं ओर के अङ्कों का जोड़, भागफल प्रकट करेगा।

(च) यदि योगफल में कोई अङ्क शेष की ओर से भागफल की ओर हासिल

लगे तो उसे शेष में ही जोड़ दो। जब कि भाजक ९८,९९८,९९९८ हो तो अङ्कों को उतारते समय दूना कर लिया जाता है, और यदि सब भाजक ९७,९९७,९९९७ हो तो अंक उतारते समय तिगुने कर लिए जाते हैं। यदि जोड़ते समय शेष की ओर से भागफल की ओर कोई हासिल ले जाया जाय तो वह अङ्क दूना या तिगुना करके शेष में जोड़ देना चाहिये।

उदाहरण १ :—

८२१३४५६७८५३२६ को ९९९ से भाग दो।

८२१३४५६७८	५३२६
८२१३४	५६७८
८	२१३४
	८
८२१४२७८२१	३१४६

कारण कि शेष की ओर से भागफल में लगने वाला हासिल १ है; भागफल ८२१४२७८२१ और शेष $=$ ३१४६ $+$ १ $=$ ३१४७

उदाहरण २:—

४५६७८ को ९८ से भाग दो।

४५६	७८
९	१२ $=$ ४५६ $\times$ २
	१८ $=$ ९ $\times$ २
४६६	०८

कारण कि शेष की ओर से भागफल की ओर जाने वाला अङ्क १ है।

$\therefore$ भागफल $=$ ४६६

शेष $=$ ८ $+$ २ $=$ १०

उदाहरण ३:—

१२३४५ को ९७ से भाग दो।

१२३	४५
३	६९ $=$ १२३ $\times$ ३
	९ $=$ ३ $\times$ ३
१२७	२३

कारण कि शेष में भागफल की ओर जाने वाला अंक १ है।

∴ भागफल = १२७

शेष = २३ + ३ = २६

परिशिष्ट (ग)

काँट

योग :—

उल्टी ओर से जोड़ो अर्थात् नीचे से ऊपर की ओर।

घटाना :—

शेष को वियोज्य में जोड़ कर वियोजक को प्राप्त करो।

गुणन :—

(क) गुणनफल को गुण्य या गुणक से भाग दो और इस प्रकार गुण्य या गुणक प्राप्त करो।

उदाहरण :—

८ × ६ = ४८

∴ ४८ ÷ ६ = ८, या ४८ ÷ ८ = ६

(ख) गुण्य के अंकों के जोड़ को ९ से भाग दो और शेष रक्खो। फिर गुणक के अंकों के जोड़ को ९ में भाग करो और शेष रक्खो। तथा उन दोनों शेषों को परस्पर गुणा करो और आवश्यक हो तो फल को ९ से भाग दो और शेष रक्खो। यह अन्तिम शेष उतना ही होगा जितना कि गुणनफल के अंकों के जोड़ को ९ से भाग देने पर शेष आता है और यही गुणन के ठीक होने की जाँच है।

उदाहरण :—

११८२ × ६८ = ८०३७६

११८२ में अंकों का जोड़ = १२

१२ ÷ ९ शेष ३,

६८ में अंकों का जोड़ = १४

१४ ÷ ९ शेष ५,

३ × ५ = १५, १५ ÷ ९, शेष ६

८०२७६ में अंकों का जोड़ = २४

२४ ÷ ९ शेष ६.

सूचना—यदि यह शेष भिन्न हों तो उत्तर त्रुटिपूर्ण है, और यदि ये समान हों तो उत्तर कदाचित् ठीक है, किन्तु विश्वास नहीं किया जा सकता ।

भाग :—

भाजक और भाग को गुणा करो और शेष गुणनफल में योग करो और इस प्रकार भाज्य प्राप्त करो ।

उदाहरण (१) १३५ ÷ ९ = १५
९ × १५ = १३५

उदाहरण (२) १६४ ÷ १० = १६ भागफल और ४ शेष
∴ १६ × १० + ४ = १६४

परिशिष्ट (घ)

इकाई में पाँच का अंक रखने वाली संख्याओं का वर्ग निकालने की विधि :—

नियम :—५ का वर्ग दक्षिण ओर रखने के पश्चात् उसके बाईं ओर शेष तथा उनसे अगले बड़े अंक का गुणनफल रखो ।

उ० १—(३५)^{२} = ३ × ४, २५ = १२२५

उ० २—(७५)^{२} = ७ × ८, २५ = ५६२५

किसी भी अंक का वर्ग ज्ञात करना ।

नियम:—उसी संख्या में इकाई का अंक और जोड़ दो तथा उसके योगफल और अन्तर से प्राप्त गुणनफल में इकाई के स्थान के अंक का वर्ग जोड़ दो । तो वह योगफल अभीष्ट वर्ग होगा ।

उ० १— (३८)^{२} = (३८ + ८) . (३८ − ८) + ८^{२}
= ४६ × ३० + ६४ = १३८० + ६४ = १४४४

उ० २— (१२३)^{२} = (१२३ + ३) (१२३ − ३) + ३^{२}
= १२६ × १२० + ९ = १५१२० + ९ = १५१२९

भिन्न रखने वाली मिश्रित संख्या का वर्ग ज्ञात करना :—

नियम :—वर्ग में $\frac{१}{२}$ भिन्न का वर्ग रख कर अन्य अंक तथा उससे अगले बड़े अंक का गुणनफल रक्खो।

उ० १:—$(५\frac{१}{२})^२$ = ५ × ६ पूर्णांक के लिए और $\frac{१}{४}$ भिन्न के लिए = ३०$\frac{१}{४}$

उ० २:—$(२०\frac{१}{२})^२$ = २० × २१ पूर्णांक के लिए और $\frac{१}{४}$ भिन्न के लिए = ४२०$\frac{१}{४}$

अन्त में २५ अंक रखने वाली संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करना:—

नियम :—अन्त के दो अंकों का वर्गमूल ज्ञात करो और शेष संख्या को ऐसे दो गुणनखण्डों में विभाजित करो जो क्रमशः एक दूसरे से बड़े हों और इनमें छोटे खंड को अन्त के दो अंकों के वर्गमूल की बाईं ओर रक्खे।

उ०:—१. $\sqrt{४२२५}$ = ६५ (५, २५ का वर्गमूल होने के कारण और ६,७ के ६ व ७ में छोटा गुणनखण्ड होने के कारण ५ के बाईं ओर रखो।)

उ०:—२. $\sqrt{१३२२५}$ = ११५ (५,२५ का वर्गमूल और ११, १२ के ११ व १२ में छोटा गुणनखण्ड होने के कारण ५ के बाईं ओर रक्खो।)

परिशिष्ट च

सूत्र-संग्रह

१. चार साधारण नियम :—

(क) भाज्य = भाजक × भागफल + शेष

(ख) पूर्ण शेष = (शे$_४$ × भाजक$_१$ × भाजक$_२$ × भाजक$_२$) + (शे$_३$ × भाजक$_१$ × भाजक$_२$) + (शेष$_२$ × भाजक$_१$) + शेष$_१$

२. म० स० तथा ल० स०

(क) म० स० × ल० स० = अ × ब

(ख) $अ = \frac{म० स० \times ल० स०}{ब}$

(ग) $ब = \frac{म० स० \times ल० स०}{अ}$

सूचना :—उक्त सूत्र में अ और ब दो संख्यायें प्रकट करते हैं।

३. औसत या माध्य

(क) $संख्याओं\ का\ औसत = \frac{संख्याओं\ का\ योगफल}{संख्याओं\ की\ गणना}$

(ख) संख्याओं का योगफल = संख्याओं का औसत × उनकी गणना

४. अनुपात तथा समानुपात

(क) यदि चार राशियाँ समानुपाती हों तो बाह्य पदों का गुणनफल मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

(ख) यदि तीन राशियाँ विततानुपात में हों तो बाह्य पदों का गुणनफल मध्य पद के वर्ग के बराबर होता है।

५. लाभ और हानि

(क) लाभ = वि० मू० – क्र० मू० (ख) हानि = क्र० मू०—वि० मू०

(ग) वि० मू०

$= \frac{दिया\ हुआ\ क्र०\ मू० \times (१००—लाभ\ प्रतिशत)}{१००}$

या

$= \frac{दिया\ हुआ\ क्र०\ मू० \times (१००—हानि\ प्रतिशत}{१००}$

(घ) जबकि प्रतिशत हानि क्र० मू० के समान हो, तो

$क्र०\ मू० = ५० \pm \sqrt{(५०)^२ —वि०\ मू० \times १००}$

(च) जबकि प्रतिशत लाभ क्र० मू० के समान हो, तो

$क्र०\ मू० = ५० \pm \sqrt{वि०\ मू० \times १०० + (५०)^२}$

सूचना :—जब कभी उत्तर में — प्राप्त हो तो उसे छोड़ देना चाहिये, कारण कि अंकगणित में —(ऋण) संख्या नहीं होती।

भिन्न रखने वाली मिश्रित संख्या का वर्ग ज्ञात करना :—

नियम :—वर्ग में $\frac{१}{२}$ भिन्न का वर्ग रख कर अन्य अंक तथा उससे अगले बड़े अंक का गुणनफल रक्खो ।

उ० १:—$(५\frac{१}{२})^२ = ५ \times ६$ पूर्णांक के लिए और $\frac{१}{४}$ भिन्न के लिए $= ३०\frac{१}{४}$

उ० २:—$(२०\frac{१}{२})^२ = २० \times २१$ पूर्णांक के लिए और $\frac{१}{४}$ भिन्न के लिए $= ४२०\frac{१}{४}$

अन्त में २५ अंक रखने वाली संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करना:—

नियम :—अन्त के दो अंकों का वर्गमूल ज्ञात करो और शेष संख्या को ऐसे दो गुणनखण्डों में विभाजित करो जो क्रमशः एक दूसरे से बड़े हों और इनमें छोटे खंड को अन्त के दो अंकों के वर्गमूल की बाईं ओर रक्खें ।

उ०:—१. $\sqrt{४२२५} = ६५$ (५, २५ का वर्गमूल होने के कारण और ६, ४२ के ६ व ७ में छोटा गुणनखण्ड होने के कारण ५ के बाईं ओर रखो ।)

उ०:—२. $\sqrt{१३२२५} = ११५$ (५,२५ का वर्गमूल और ११, १३२ के ११ व १२ में छोटा गुणनखण्ड होने के कारण ५ के बाईं ओर रक्खो ।)

परिशिष्ट च

सूत्र-संग्रह

१. चार साधारण नियम :—

(क) भाज्य = भाजक × भागफल + शेष

(ख) पूर्ण शेष = $(शे_४ \times भाजक_१ \times भाजक_२ \times भाजक_३) +$
$(शे_३ \times भाजक_१ \times भाजक_२) +$
$(शेष_२ \times भाजक_१) + शेष_१$

२. म० स० तथा ल० स०

(क) म० स० × ल० स० = अ × ब

(ख) $अ = \frac{म॰ स॰ \times ल॰ स॰}{ब}$

(ग) $ब = \frac{म॰ स॰ \times ल॰ स॰}{अ}$

सूचना :—उक्त सूत्र में अ और ब दो संख्यायें प्रकट करते हैं।

३. औसत या माध्य

(क) $संख्याओं\ का\ औसत = \frac{संख्याओं\ का\ योगफल}{संख्याओं\ की\ गणना}$

(ख) संख्याओं का योगफल = संख्याओं का औसत × उनकी गणना

४. अनुपात तथा समानुपात

(क) यदि चार राशियाँ समानुपाती हों तो बाह्य पदों का गुणनफल मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

(ख) यदि तीन राशियाँ वितताअनुपात में हों तो बाह्य पदों का गुणनफल मध्य पद के वर्ग के बराबर होता है।

५. लाभ और हानि

(क) लाभ = वि॰ मू॰ – क्र॰ मू॰ (ख) हानि = क्र॰ मू॰—वि॰ मू॰

(ग) वि॰ मू॰

$= \frac{दिया\ हुआ\ क्र॰\ मू॰ \times (१००—लाभ\ प्रतिशत)}{१००}$

या

$= \frac{दिया\ हुआ\ क्र॰\ मू॰ \times (१००—हानि\ प्रतिशत}{१००}$

(घ) जबकि प्रतिशत हानि क्र॰ मू॰ के समान हो, तो

$क्र॰\ मू॰ = ५० \pm \sqrt{(५०)^२ — वि॰\ मू॰ \times १००}$

(च) जबकि प्रतिशत लाभ क्र॰ मू॰ के समान हो, तो

$क्र॰\ मू॰ = ५० \pm \sqrt{वि॰\ मू॰ \times १०० + (५०)^२}$

सूचना :—जब कभी उत्तर — में प्राप्त हो तो उसे छोड़ देना चाहिये, कारण कि अंकगणित में —(ऋण) संख्या नहीं होती।

६. सरल ब्याज

(क) सरल ब्याज $= \frac{मू \times स \times द}{१००}$

(ख) मिश्रधन $=$ मू $\left(१ + \frac{स \times द}{१००}\right)$

(ग) मू $= \frac{सरल ब्याज \times १००}{स \times द}$

(घ) स $= \frac{सरल ब्याज \times १००}{मू \times द}$

(ङ) द $= \frac{सरल ब्याज \times १००}{मू \times स}$

७. आयत

आयत का क्षे० $=$ ल० $\times$ चौ०

८. किसी कमरे की चार दीवारों का क्षेत्रफल

(क) क्षे० $=$ (ल० $+$ चौ०) $\times$ २ ऊँ०

(ख) ऊँ० $= \frac{क्षे०}{२(ल + चौ०)}$

९. त्रिभुज

(क) किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{आधार \times ऊँचाई}{२}$

(ख) किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल जिसकी तीनों भुजाएं दी हुई हों।

क्षेत्रफल $= \sqrt{प (प - क) (प - ख) (प - ग)}$

जबकि प $= \frac{क + ख + ग}{२}$ और क, ख, ग तीनों भुजाएँ हैं।

१०. समबाहु त्रिभुज

(क) $क्षे० = \frac{(भुजा)^2 \times \sqrt{3}}{4}$

(ख) $भुजा = \sqrt{\frac{4 \times क्षेत्रफल}{\sqrt{3}}}$

११. समद्विबाहु त्रिभुज

$क्षे० = \frac{आधार \sqrt{4\ भुजा^2 - आधार^2}}{4}$

१२. समान्तर चतुर्भुज

क्षे० = आधार × ऊँचाई

१३. सम चतुर्भुज

$क्षे० = \frac{विकर्णों\ का\ गुणनफल}{2}$

१४. चतुर्भुज

(क) $क्षे० = \frac{विकर्ण \times लम्बों\ का\ योगफल}{2}$ (जबकि विकर्ण आकृति के अन्दर हों)

(ख) $क्षे० = \frac{विकर्ण \times लम्बों\ का\ अन्तर}{2}$ (जबकि विकर्ण आकृति के बाहर हों)

१५. समलम्ब

$क्षे० = \frac{समान्तर\ भुजाओं\ का\ योगफल \times ऊँचाई}{2}$

१६. वृत्त

(क) $क्षे० = \pi (अर्द्ध\text{-}व्यासार्द्ध)^2$

(ख) $व्यासार्द्ध = \sqrt{\frac{क्षेत्रफल}{\pi}}$

(ग) $परिधि = व्यासार्द्ध \times 2\pi$

१७. आयताकार ठोस

(क) आयतन = ल० × चौ० × ऊँ०

(ख) ल० = $\frac{\text{आयतन}}{\text{चौ० × ऊँ०}}$

(ग) चौ० = $\frac{\text{आयतन}}{\text{ल० × ऊँ०}}$

(घ) ऊँ० = $\frac{\text{आयतन}}{\text{ल० × चौ०}}$

१८. बेलन

(क) वक्रतल = २π र ऊँ (र = व्यासार्ध, ऊँ = ऊँचाई)

(ख) समस्त तल = २π र (र + ऊँ)

(ग) आयतन = πर² ऊँ

१९. शंकु

(क) वक्रतल = π र ल (र = व्यासार्ध, ल = तिर्छी ऊँचाई)

(ख) समस्त तल = πर (ल + र)

(ग) तिर्छी ऊँचाई = $\sqrt{\text{ऊँ}^2 + \text{र}^2}$

(घ) आयतन = ⅓π र² ऊँ

२०. गोला

(क) तल = ४πर² = πव²

(र = व्यासार्ध, व = व्यास)

(ख) आयतन = ⁴⁄₃πर³ = ⅙πव³